S. L. RUBINSTEIN
INSTITUTO DE FILOSOFIA DE LA
ACADEMIA DE CIENCIAS DE LA URSS

el Proceso del Pensamiento y las Leyes del Análisis, la Síntesis y la Generalización

EDICIONES PUEBLOS UNIDOS - MONTEVIDEO - 1963

EL PROCESO DEL PENSAMIENTO Y LAS LEYES DEL ANALISIS LA SINTESIS Y LA GENERALIZACION

Universidad de Oviedo — Seminario de Filosofía

16-96

R-208

ACADEMIA DE CIENCIAS DE LA URSS
Instituto de Filosofía
Sección Psicología

EL PROCESO DEL PENSAMIENTO Y LAS LEYES DEL ANALISIS LA SINTESIS Y LA GENERALIZACION

Libro 92785

INVESTIGACIONES EXPERIMENTALES

bajo la dirección general de

S. L. RUBINSTEIN

Seminario de Filosofía

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Seminario de Filosofía
Armario I Estante 4

MONTEVIDEO *Ediciones Pueblos Unidos* URUGUAY

Traducción directa del ruso
por
AUGUSTO VIDAL ROGET

© EDICIONES PUEBLOS UNIDOS S. A.

TACUAREMBO Y COLONIA — C. CORREO 589 — MONTEVIDEO-URUGUAY

IMPRESO EN EL URUGUAY PRINTED IN URUGUAY

NOTA PRELIMINAR

El presente libro está dedicado a la primera serie de investigaciones del pensar llevadas a cabo en la Sección de Psicología del Instituto de Filosofía de la Academia de Ciencias de la U.R.S.S. Constituye un complemento esencial del libro El Pensamiento y los Caminos de su Investigación, *que publicamos recientemente (Editorial de la Academia de Ciencias de la U.R.S.S., 1958)*. Estas investigaciones se refieren, ante todo, al análisis y a la generalización, en particular a la dependencia en que la generalización se encuentra respecto al análisis, el cual, naturalmente, siempre se halla vinculado a la síntesis. Están, asimismo, estrechamente relacionadas entre sí la generalización y la abstracción. Partiendo de dicha interconexión general, hemos elegido como objeto principal de las presentes investigaciones el análisis y la generalización.*

Los trabajos incluidos en este libro responden a unos mismos principios teóricos. Nuestro punto de partida es el concepto de determinación de todos los fenómenos en general y del pensamiento en particular según la tesis materialista dialéctica de que las causas externas actúan a través de las condiciones internas. Es tarea de la investigación psicológica del pensar el descubrir las condiciones internas de la actividad pensante del hombre y poner de manifiesto la interdependencia en que se hallan dichas condiciones con las externas.

El proceso del pensar es un proceso de análisis y de síntesis, de abstracción y de generalización. Estas funciones, en la actividad del pensar, presentan formas varia-

---

* Véase la traducción al castellano de Ediciones Pueblos Unidos, Montevideo, 1960. (N. de la R.).

das. Las leyes internas de los procesos de análisis y síntesis, de abstracción y generalización, constituyen el núcleo o armazón de la teoría psicológica general del pensar.

En el curso de nuestras investigaciones, no nos hemos limitado a registrar los resultados externos del proceso estudiado: el hecho escueto de que se haya resuelto tal o cual problema, de que se hayan asimilado tales o cuales conocimientos, etc.; hemos analizado el hondo proceso que se esconde tras los resultados externos. Hemos procurado estudiar el pensar, ante todo donde el hombre, como resultado del análisis de las relaciones entre los objetos, avanza, por primera vez, hacia nuevas generalizaciones.

Nuestras investigaciones nos han permitido elaborar un método específico que ha sido aplicado en algunos de los trabajos que a continuación se publican y que puede aplicarse en nuevas investigaciones; consiste, el método aludido, en presentar problemas auxiliares que contengan algunos de los eslabones del problema fundamental que ha de ser resuelto. Las investigaciones han demostrado que la posibilidad de utilizar tal o cual sugerencia —incluida en el problema auxiliar— para resolver el fundamental, depende de lo que haya avanzado el sujeto en el análisis de dicho problema fundamental. De ahí que la presentación de problemas auxiliares o sugerencias que determinen la dirección del análisis del problema principal, pueda servir de efectivo recurso metodológico para poner de manifiesto el curso ascendente del pensar.

A nuestro modo de ver, el método que hemos aplicado en la investigación del pensar puede, a su vez, transformarse, sin desvirtuar sus premisas metodológicas, y con la correspondiente elaboración didáctica y metodológica especial, en método de trabajo pedagógico encaminado no sólo a proporcionar conocimientos y a reforzar aptitudes, sino, además, a desarrollar el pensamiento de los educandos.

S. L. RUBINSTEIN.

K. A. SLAVSKAIA

EL PROCESO DEL PENSAR Y LA UTILIZACION DE LOS CONOCIMIENTOS

1. La transferencia de la resolución y su dependencia respecto al análisis, a la síntesis y a la generalización

Investigación primera

La presente investigación se propone descubrir las leyes internas del pensar que hacen posible transferir la resolución de un problema a otro.

Efectuar una transferencia significa resolver la cuestión acerca de *lo* que debe ser aplicado (conocimientos, principios y resoluciones) y a *qué* debe aplicarse (situación o problema); significa analizar la vieja situación y la nueva, correlacionar entre sí el problema resuelto y el que se ha de resolver, precisar lo que haya de común entre ellos. Una resolución puede transferirse si se ha visto lo que tienen de común los problemas y si se ha encontrado la resolución generalizada de los mismos, a la que se llega en el curso del análisis y de la síntesis de los dos problemas dados.

Nuestra investigación se limita a los experimentos de los sujetos (alumnos de los tres últimos cursos de la escuela media y estudiantes de escuelas superiores) que no pudieron resolver independientemente el problema principal y lo solucionaron transfiriendo la resolución de otro problema más fácil (auxiliar).

La *metodología* del experimento era la siguiente: el experimentador presentaba al sujeto, para que lo resolviera, un problema geométrico del curso de planimetría que se estudia en los años antepenúltimo y penúltimo de

la escuela media. Se anotaban con todo detalle los razonamientos del examinando. Se analizaban las anotaciones. En la parte izquierda de la anotación se escribía el razonamiento del sujeto al resolver el problema; en la otra parte, se registraba el análisis a que el experimentador sometía el proceso.

Anotación Nº 6 (1). (Sujeto N. S.)

Problema. Se han unido los puntos medios de los lados de un cuadrilátero. Demuéstrese(2) que la figura resultante es un paralelogramo (fig. 1).

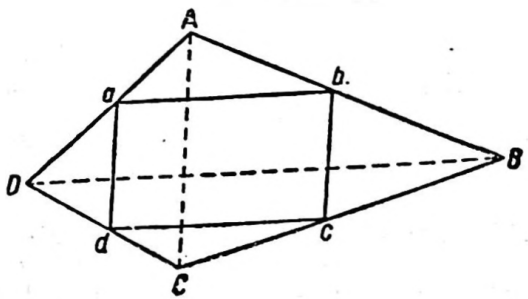

Figura 1

Razonamiento del sujeto	**Análisis de la resolución**
Suj.: Por lo visto es necesario tomar en consideración los triángulos *Aba* y *cCd;* serán iguales. Aunque, de todos modos, se sabe que cada lado es igual a	Los elementos geométricos que figuran en los términos conocidos del problema (igualdad de segmentos en los lados del cuadrilátero), se correlacionan con elementos de lo que se pide,

(1) Transcribimos, a modo de ejemplo, la anotación de un experimento en que el sujeto resolvió el problema fundamental sin que se le presentara el problema auxiliar.

(2) Al sujeto se le mostró una figura en la que se hallaban trazadas las diagonales del cuadrilátero (*AC* y *BD*).

otro en los triángulos contiguos, los lados no son iguales entre sí. (Señala en la figura la igualdad de los segmentos $Bc = cC$, etc.).

Aunque sean iguales los lados de los triángulos contiguos, no son iguales los correspondientes ángulos.

Para qué quiero yo la igualdad de los triángulos si lo que se pide es demostrar el paralelismo de los lados opuestos.

¿Ha resultado casual que los lados *ab cd* sean paralelos? (lo comprueba en otra figura). Sí, son paralelos. Hay que tomar en consideración, pues, la semejanza del triángulo *ABC* y del triángulo *bBc;* como quiera que los lados del triángulo grande quedan divididos en segmentos proporcionales, dichos triángulos serán semejantes. Por consiguiente, $bc \parallel AC$

$$\frac{bc}{Ac} = \frac{1}{2} \quad \text{y}$$

del triángulo *ADC*, lo mismo. Por consiguiente, $bc \nparallel ad$.

lo cual se traduce en el examen de triángulos "iguales". Es decir, los objetos de los términos conocidos del problema y de lo que se pide, se incluyen en un nuevo sistema de nexos (triángulos). Esta prueba pone de manifiesto que no se han analizado bastante los términos conocidos del problema (sobre la igualdad de los segmentos); por esto lleva al ulterior análisis del mismo término del problema. (El sujeto señala nuevamente en la figura segmentos iguales).

La misma prueba lleva al análisis de objetos que entran en lo que se pide del problema; lo que se pide, se concreta (y se modifica su formulación) como necesidad de demostrar el paralelismo de los lados opuestos en vez de demostrar que la figura resultante es un paralelogramo.

El análisis de lo que se pide en el problema lleva a un ulterior análisis relacionado con la percepción de la figura.

El análisis del paralelismo de las rectas se realiza correlacionando los segmentos laterales con la condición de la igualdad. Los elementos dados y lo que se pide se incluyen en un nuevo sistema de nexos (semejanza de triángulos). La condición dada (sobre la igualdad de segmentos en los lados del cuadrilátero) aparece en calidad de segmentos proporcionales que poseen las propiedades requeridas.

* * *

En los experimentos, el problema auxiliar se presenta a unos examinandos en las etapas iniciales del análisis del problema fundamental[3]; a otros, en las etapas últimas. (El problema auxiliar se presentaba procurando que el examinando no adivinara la función auxiliar que a dicho problema se asignaba; se decía, por ejemplo: "resuelva este problema para descansar", etc.). Se entendían por etapas iniciales del análisis las que versaban sobre el análisis de las condiciones dadas en la formulación inicial del problema. Se entendían por etapas posteriores aquellas en que el sujeto, en el razonamiento para solucionar el problema, hacía intervenir términos nuevos, no dados en la formulación inicial.

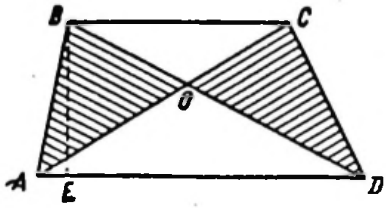

Figura 2

En el problema fundamental había que demostrar la equivalencia (igualdad de superficies) de los triángulos *ABO* y *OCD* (fig. 2) incluidos entre las diagonales de un trapecio y situados sobre los correspondientes lados no paralelos. La resolución del problema consiste en señalar los triángulos *ABD* y *ACD*, que tienen comunes la base *AD* y la altura *BE*, que es la altura del trapecio. De ahí que los triángulos sean equivalentes. En ellos, además de los triángulos buscados *ABO* y *OCD*, entra el triángulo *AOD* que tiene, con estos dos, lados comunes. Por consiguiente, los triángulos buscados *ABO* y *OCD* son equivalentes.

El proceso del razonamiento, en su conjunto, fue como sigue:

La resolución comenzó con el examen de la igualdad de alturas y bases de los triángulos *ABO* y *OCD* con el propósito de de-

(3) Para nosotros, el análisis está indisolublemente vinculado a la síntesis en cada eslabón del proceso, pero aquí hablamos sólo de análisis porque lo hacemos objeto de investigación especial: en el caso presente, examinamos la dependencia en que se halla la transferencia de la resolución respecto al análisis del problema.

mostrar, de esta manera directa, su equivalencia, o bien con la intención de demostrar dicha equivalencia por la igualdad de los triángulos indicados. Los examinandos analizaron lo dado directamente en los términos del problema: los triángulos *ABO* y *OCD*. Incluimos esta parte de la resolución —mientras los examinandos no rebasaban los límites de lo directamente dado en los términos del problema— en las etapas iniciales del análisis, y presentábamos, entonces, un problema auxiliar al *primer* grupo de sujetos.

Una vez convencidos de que las alturas y las bases de los triángulos *ABO* y *OCD* no son iguales (o sea: que por este camino directo es imposible demostrar la equivalencia de los triángulos dados) los examinandos tenían que salir de los límites que representaban los triángulos dados en la formulación del problema. Era necesario descubrir nuevos elementos que pusieran de manifiesto los caminos que permiten resolver el problema. Los examinandos empezaron a hacer tentativas para demostrar la equivalencia de otras figuras (por ejemplo, de otros triángulos) con la intención de poder demostrar luego, partiendo de lo demostrado, la equivalencia de las figuras en cuestión. Para ello, trazaban y señalaban alturas y bases de otras figuras (por ejemplo, señalaban los triángulos *ABD* y *ACD* cuya altura es común a la del trapecio). Referíamos a las etapas últimas del análisis del problema, el proceso durante el cual se ponían de manifiesto nuevas condiciones, y presentábamos el problema auxiliar al *segundo* grupo de examinandos.

En la resolución de los dos problemas, se utilizó como eslabón común la base *AD* que lo es de los triángulos *ABD* y *ACD;* en el problema auxiliar, donde lo que se tenía que demostrar era la igualdad de diagonales en el rectángulo (fig. 3), dicha base se aprovechaba para demostrar la *igualdad* de los triángulos *ABO* y *OCD*, y en el problema fundamental se recurría a ella para demostrar la *equivalencia* de los mismos.

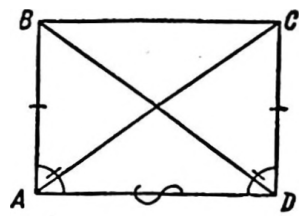

Figura 3

Comparando el proceso seguido por los dos grupos de examinandos al aplicar el problema auxiliar al fundamental, hemos observado cómo se efectúa la delimitación del

elemento común que lleva a la transferencia de la solución, según que los examinandos se encuentren en las etapas iniciales o finales del análisis del problema.

* * *

Resultados. Comparemos de qué modo resolvieron el problema los que recibieron el auxiliar en las primeras etapas del análisis del fundamental y quienes lo recibieron durante las etapas últimas.

Transcribimos dos anotaciones típicas de la resolución:

Resolución del sujeto D. V., que recibió el problema auxiliar en las etapas iniciales del análisis (anotación Nº 17)

Suj.: Tenemos un trapecio, diagonales... ¿qué más? Parece que nada más. Se ha de demostrar que el triángulo *ABO* es equivalente al triángulo *OCD*, es decir, que los dos triángulos tienen superficies iguales.

La superficie... su fórmula es $S = h \cdot r$

No, $S = \frac{h \cdot a}{2}$

la altura por la base y dividido por dos, el semiproducto de la base por la altura. Así, pues, hay que trazar las alturas... *AN* y *DE*. Demostremos ahora su igualdad (fig. 4).

(El *experimentador* da al sujeto un problema auxiliar con un rectángulo).

Suj.: ¿Se ha de demostrar que las diagonales son iguales? Pero, según me parece, estudiamos

Resolución del sujeto V. D., que recibió el problema auxiliar en las etapas últimas del análisis (anotación Nº 2)

Suj.: ¿Se trata de superficies? He olvidado todo lo de las superficies... ¿A qué es igual la superficie del trapecio? Al semiproducto de la base por la altura; aunque no, no, dos bases... A la semisuma de las bases por la altura. Pero ahora precisamente me hacen falta las superficies de los triángulos. Así pues, en el fondo, hay que demostrar la igualdad de alturas y de bases de estos pequeños triángulos (traza *BK* y *CL*, subraya *AO* y *OD* (fig. 5).

Pero, ¿no tiene los lados desiguales, el trapecio? El caso es que, según me parece, en el trapecio, las diagonales, al cortarse, también se dividen por la mitad, aunque no, $AO \neq OD$, pero si

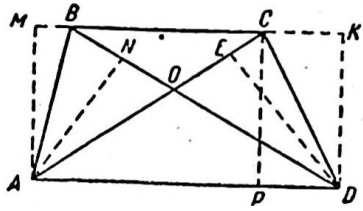

Figura 4

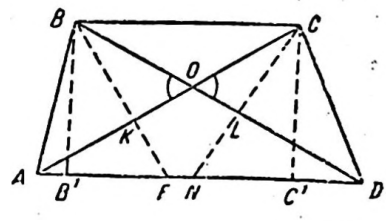

Figura 5

hace tiempo un teorema según el cual las diagonales de un rectángulo son iguales... ¿así, ahora quieren que lo demuestre? Bueno, está bien. Hay que examinar algunos triángulos: los *ABO* y *OCD*, hay que demostrar su igualdad... Aunque lo que yo necesito son diagonales enteras... Entonces, tomemos el triángulo *ABD* y el triángulo *ACD*. $AB = CD$, como lados de un rectángulo; *AD*, es común.

$< BAD = < ADC$. Por tanto, $AC = BD$.

Experimentador:

Bueno, ahora prosiga la resolución del otro problema.

Suj.: Aquí tenemos un trapecio. El caso es completamente distinto. Aquí, las diagonales no son iguales ni lo son los lados no paralelos. Si fueran iguales, enseguida demostraría la igualdad de los triángulos. No sé de qué me pueden servir aquí las diagonales. Necesito demostrar la equivalencia de los triángulos *ABO* y *OCD*. Está claro que no se puede demostrar directamente y por medio de la igualdad... Quizá se pueda hacer tomamos *BO* y *OC* como bases —que son los otros segmentos de las diagonales que se cortan— tampoco son iguales... Qué hacer, pero $AB \neq CD$, tanto más cuanto que el trapecio tiene los lados desiguales. Tampoco demuestras la igualdad de los triángulos, o sea, no hay lados iguales, aunque son iguales los ángulos: $< BOA = < COD$... Si prolongamos las alturas *BK* y *CL*... supongamos, *BF* y *CN*, tampoco por esto son iguales... Y si trazamos simplemente... (traza BB^1 y CC^1)...

(*El experimentador* da al sujeto el problema auxiliar con un rectángulo).

Suj.: ¿Hay que demostrar la igualdad de diagonales? Son iguales porque tienen (señala los triángulos *ABD* y *ACD*) la base común e iguales las alturas.

Experimentador:

Bueno, ahora puede continuar la resolución del otro problema.

Suj.: Ah, claro. Ya no tengo nada por resolver, se lo he resuelto todo aquí (muestra el problema auxiliar).

por medio de los triángulos *ABD* y *ACD*. (Vuelve al problema auxiliar y compara): $AB = CD$ (Esto no nos $< BAD = < ACD$ (hace falta. Lo que necesitamos es *AD* —base común—. (Traza la altura del trapecio *Cp* y las alturas *AM* y *DK*). $KD = AM = Cp$; por tanto, son equivalentes.

Experimentador: Bueno, pero explíqueme por qué los triángulos *ABO* y *OCD* serán equivalentes. No se comprende.

Suj.: Acabamos de demostrar que son equivalentes los triángulos grandes *ABD* y *ACD*, y los pequeños, sus partes...

Todos los examinandos, que recibieron el problema en diferentes etapas del análisis del principal, resolvieron el problema auxiliar como problema por completo independiente, desligado del básico. Después de resolverlo, prosiguieron la resolución del básico. Como vemos por las anotaciones, el sujeto comienza a analizar, en los términos del problema principal, la igualdad de ángulos, la igualdad de diagonales, la igualdad de los lados opuestos. Tenemos, pues, que en los términos del problema principal el sujeto separa los elementos que había utilizado para resolver el problema auxiliar, para demostrar la igualdad de los triángulos. El examinando analiza aquí los términos del problema fundamental correlacionándolos (acto de síntesis) con lo que se pide en el auxiliar.

Luego, el sujeto D. V. restablece lo que se pide en el problema fundamental diciendo: "Necesito demostrar la equivalencia de los triángulos". Después, analiza el problema fundamental poniendo en relación sus términos conocidos con lo que en él se pide y no con lo que se pide en el problema auxiliar. Mediante el análisis anterior, se han separado lados iguales, diagonales, una base común como posibles términos conocidos análogos por sus propiedades a los del problema auxiliar; ahora el sujeto los examina desde el punto de vista de lo que se pide en el problema básico. Ya elige sólo los que son esenciales para la resolución de dicho problema (para la demostración de la equivalencia). En el transcurso de este análisis, se deter-

minan y analizan los términos propios del problema fundamental. Por ejemplo, el examinando S. T. separa en esos términos las diagonales *AC* y *BD* (al principio, porque se habían utilizado para la demostración en el problema auxiliar); supone que también son iguales en el problema fundamental y que, en consecuencia, también serán iguales sus segmentos *AO* y *OD*, bases de los triángulos *ABO* y *OCD*. El examinando intenta aplicar la igualdad de diagonales utilizada en el problema auxiliar como igualdad de bases de los triángulos que se han de determinar, o sea que, de este modo, analiza los términos propios del problema fundamental (pues la igualdad de bases de los triángulos *ABO* y *OCD* constituye ya una de las condiciones supuestas del problema fundamental) correlacionándolos con lo que en él mismo se pide.

Durante el análisis del problema fundamental, en relación con el auxiliar —análisis que se va efectuando gradualmente—, el sujeto se convence de que las bases de los triángulos que se han de determinar no son iguales como tampoco lo son las alturas; se convence de que es imposible utilizar para la resolución los triángulos dados en los términos del problema. En una determinada etapa del análisis del problema fundamental, el examinando al fin descubre el eslabón común, esencial para resolver el problema: la base *AD* de los triángulos *ABD* y *ACD*. Resulta que uno de los eslabones de la resolución del problema auxiliar no es incorporado desde el exterior al problema fundamental, sino que se descubre en este mismo como resultado del análisis precedente. La base *AD* se utiliza ya para la demostración de la equivalencia de los triángulos (en consonancia con lo que se pide en el problema fundamental) y no para la demostración de su igualdad, como en el problema auxiliar.

El proceso del análisis, por tanto, va desde el descubrimiento de lo general como análogo, al descubrimiento de lo general como básico para el problema fundamental.

Así tenemos que cuando el problema auxiliar se presenta en las etapas *iniciales* del análisis del principal, el primero se resuelve como problema independiente, sin relacionarlo con el fundamental, cuyo análisis se prosigue después. El sujeto analiza los *términos* del problema *fundamental* en función de *lo que se pide en el auxiliar* y luego (o simultáneamente) en relación con lo que se pide en el fundamental. Semejante análisis a través de la correlación (síntesis) de los dos problemas conduce poco a poco a la delimitación de lo común como esencial para resolver el problema fundamental del eslabón.

En el otro grupo de experimentos, los examinandos recibían el problema auxiliar en las etapas *últimas* del análisis del fundamental. En tales casos, el auxiliar ya no se resolvía independientemente, sino, desde el primer momento, en relación con el otro. Al resolver el auxiliar, donde es necesario demostrar la igualdad de diagonales, después de haber examinado la igualdad de los triángulos *ABD* y *ACD*, el sujeto decía: "son iguales, porque tienen (los triángulos *ABD* y *ACD*) la base común e iguales las alturas".

¿Qué sucede en este caso? En primer lugar, el examinando deja aparte todos los eslabones de la solución del problema auxiliar que no son esenciales para el fundamental (igualdad de ángulos, de lados, etc.). En segundo lugar, enseguida denomina alturas iguales y no lados iguales a los elementos esenciales para la resolución del problema fundamental. Ello significa que enseguida los relaciona con la demostración de la equivalencia (en consonancia con lo que se pide en el problema principal) y no sólo con la demostración de la igualdad (como exige el problema auxiliar).

Por consiguiente, el sujeto no sólo analiza los términos del problema auxiliar en función de lo que en él mismo se pide, sino que enseguida y simultáneamente los analiza, además, en función de lo que se pide en el pro-

blema fundamental. El eslabón común, necesario para resolver el problema, de inmediato se pone de relieve al resolver el problema auxiliar, es decir, el problema fundamental está ya bastante analizado. Lo general se delimita sobre la marcha, enseguida. Esto significa que el sujeto, al resolver el problema auxiliar, resuelve ya el fundamental. Resulta, así, innecesario aplicar un problema a otro.

Vemos, pues, que al presentar el problema auxiliar durante las etapas *últimas* del análisis del problema fundamental, aquél ya no se resuelve como problema independiente, sino que su resolución y análisis se llevan a cabo inmediatamente en función del principal, a saber: *sus términos* se analizan correlacionándolos con *lo que se pide* en el problema *fundamental.* La *generalización* no se efectúa gradualmente, sino *de golpe, "sobre la marcha"*, en el transcurso de la resolución del problema auxiliar.

Los experimentos han demostrado, por tanto, que es condición necesaria de la transferencia el que el examinando correlacione ambos problemas: el fundamental y el auxiliar. Todo problema se resuelve mediante un acto *de síntesis* que estriba en correlacionar entre sí los términos conocidos del problema con lo que en él se pide.

Caso que la resolución se haga transfiriendo la del otro problema, los términos del primero se correlacionan, ante todo, con lo que se pide en el segundo y no con lo que se pide en él mismo; los términos del problema auxiliar —en el otro caso— se analizan correlacionándolos con lo que se pide en el fundamental. Los términos de un problema se analizan en función de lo que se pide en el otro como de manera entrecruzada; de este modo se descubre lo que tienen de común.

Ahora bien, para el análisis del proceso del pensar *no es, de por sí,* importante lo que se da en el contenido objetivo del problema, la correlación —por sí misma— de los términos conocidos con lo que se pide (ello constituye un hecho geométrico, algebraico, etc., pero no un hecho psicológico), sino de qué modo se establece dicha corre-

lación, cada vez de manera distinta, en el proceso del pensar, qué parte del contenido objetivo (geométrico, algebraico) del problema, en cada etapa de la resolución, aparece en el pensamiento del individuo que resuelve el problema.

Los experimentos han demostrado que al correlacionar entre sí dos problemas y al analizar uno de ellos en función del otro, *el papel rector corresponde al análisis del problema fundamental.* Diríase que el sentido de la transferencia estriba en pasar la resolución del problema auxiliar al otro problema, o sea, que basta analizar el auxiliar; los experimentos han demostrado, sin embargo, que el problema auxiliar en sí se resuelve y se utiliza de manera diversa según se haya analizado el fundamental.

El eslabón común de la resolución se delimitaba de manera distinta según en qué etapa del análisis se encontrara el examinando al recibir el problema auxiliar. Si el sujeto correlacionaba el problema fundamental y el auxiliar en las etapas iniciales del análisis del primero, la generalización se llevaba a cabo gradualmente; si se encontraba en las etapas últimas de dicho análisis, lo común se delimitaba "sobre la marcha", enseguida.

También era distinto el momento en que se transfería la resolución según fuera el grado a que se hubiera llegado del análisis del problema fundamental; en un caso, la transferencia se efectuaba después de resolver el problema auxiliar, en el transcurso del ulterior análisis del fundamental; en el otro caso, se efectuaba bastante antes, durante la resolución del problema auxiliar.

Vemos, por tanto, que la transferencia, la utilización de los datos externos incluidos en el problema auxiliar, únicamente se da cuando se han creado para ello las premisas internas en el transcurso del análisis del problema fundamental.

Para poner de manifiesto aun con mayor claridad el papel que corresponde al análisis del problema fundamental, hemos utilizado en un grupo particular de experimentos no un proble-

ma auxiliar, sino la denominada "sugerencia", que también se hacía a los examinandos o en las etapas iniciales del análisis del problema fundamental o en las etapas últimas. Servía de "sugerencia" uno de los elementos del análisis destacado por el experimentador (durante la resolución del problema, el experimentador subrayaba con un trazo grueso la base *AD*, lo que significaba que esta base era importante para la resolución). Los experimentos han demostrado que los distintos sujetos a quienes se hacía una misma "sugerencia" en las distintas etapas del análisis del problema, la utilizaban de manera distinta para la resolución (quienes la recibían en las primeras etapas no la relacionaban de ningún modo con la resolución del problema y no podían comprender por qué el experimentador subrayaba "la base del trapecio"; quienes recibían la "sugerencia" en las últimas etapas, enseguida, "sobre la marcha", la incluían en la resolución).

La utilización de los datos que se presentan al examinando desde el exterior: problemas auxiliares, "sugerencias", etc., depende del nivel a que se haya llegado ya en el análisis del problema.

En el curso de la investigación, el problema auxiliar se presentó a los sujetos no sólo *después* de haberse dado el fundamental (en las etapas primeras o últimas del análisis), sino, además, *antes* de darlo. El problema auxiliar se presentó antes porque en los trabajos consagrados al problema de que nos ocupamos (Ponomariov, I. A., Hippenreiter, I. B.) se establece una diferencia de principio entre la presentación del problema auxiliar antes que el principal y la que se hace después. Los experimentos realizados con 15 sujetos (10 alumnos de la escuela media y 5 estudiantes de escuelas superiores) han revelado que también cuando el problema auxiliar se presenta antes que el fundamental, unos examinandos correlacionan los dos problemas en las etapas iniciales del análisis del fundamental, y otros lo hacen durante las etapas últimas. Además, los primeros realizaron la generalización gradualmente, mientras que los segundos la efectuaron enseguida.

Transcribimos dos anotaciones para que sirvan como elementos de comparación:

Resolución del sujeto O. V. (anotación Nº 10)

Suj.: Aquí probablemente también hay que demostrar la equivalencia a través de la igualdad de triángulos. Pues si los triángulos son iguales, son equivalentes. Las diagonales, probablemente, son iguales; los lados no paralelos son iguales... ¿Pero es isósceles, el trapecio?

Examinador: No; puede ser cualquiera.

Suj.: Esto ya es más difícil; allí, donde tenemos rectángulos, todo es igual. Aquí los ángulos, naturalmente, tampoco son iguales (fig. 6).

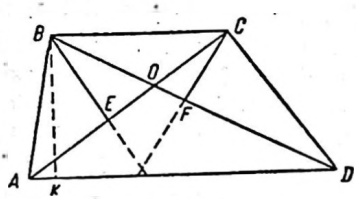

Figura 6

Necesitamos demostrar la equivalencia de los triángulos *ABO* y *OCD*, pero si no tienen ningún lado igual, ello significa que no tienen iguales ni las bases ni las alturas. Aunque, podemos prolongar las alturas. (Prolonga las alturas *BE* y *CF*). Estas ya serán las alturas de los triángulos *ABD* y *ACD*, que hemos demostrado que son iguales.

Resolución del sujeto A. M. (anotación Nº 7)

Suj.: ¿Tenemos que demostrar la equivalencia de los triángulos *ABO* y *OCD*? ¿La equivalencia, significa igualdad de alturas y de bases? Ahora lo vamos a demostrar (fig. 7). (Traza *BE* y *CM*). Las alturas han de ser iguales. Esto puede demostrarse partiendo de los triángulos *BOE* y *OCM*: $< BOE = < MOC$ (por ser opuestos por el vértice) $< OMC = < OEB$ (por ser rectos).

No, el caso es que no existe esta condición de igualdad, que los triángulos sean iguales por sus ángulos... Las bases también son iguales. ¿Quizá $AB = CD$? No, el trapecio no es isósceles. ¿Quizá se tenga que deducir de la superficie del trapecio? Traza *CK*. La superficie del trapecio es igual a $\frac{AD \cdot CK}{2}$, la mitad de la altura por la base. No, no es esto. La altura *CK*

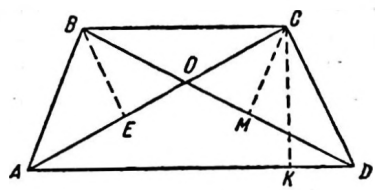

Figura 7

mos utilizado en este problema, pero aquí tampoco son iguales. Tienen una base común, pero las alturas no son iguales. Esto podríamos demostrarlo por su igualdad, es decir, por su equivalencia... Sí, pero tienen distintas alturas: (traza *BK*). ¡Tienen la altura común a la del trapecio!

El sujeto O. V. ya en las etapas *primeras* correlaciona los problemas fundamental y auxiliar, analizando los términos conocidos, primero en función de lo que se pide en el auxiliar. El eslabón común, esencial para la resolución del problema fundamental, se va descubriendo *gradualmente* y culmina, de hecho, en las etapas últimas del análisis de dicho problema.

es la altura de *ACD* y, al mismo tiempo, de *ABD*. Estos mismos triángulos los hemos utilizado en el problema auxiliar. Eran iguales; ahora nosotros... ¡Pero si tienen la base común! Así, pues, son equivalentes...

El examinando A. M., a diferencia de O. V., no correlaciona al principio los problemas. Únicamente en las etapas *últimas* del análisis del fundamental, cuando busca otras figuras relacionadas con la equivalencia de las figuras dadas, después de delimitar los triángulos *ABD* y *ACD*, correlaciona como problemas que tienen algo de común el fundamental y el auxiliar y entonces *enseguida* realiza la generalización: separa la base común *AD* de los triángulos equivalentes.

Vemos, pues, que el presentar el problema auxiliar antes o después que el problema fundamental no determina de por sí, unívocamente, el carácter de su utilización. El curso de la resolución (la generalización y la transferencia) depende del momento en que el examinando correlaciona los problemas. Esto no significa, desde luego, que el cambio de las condiciones externas no repercuta de ningún modo en el decurso de la resolución: las diferencias que se dan por presentar el problema auxiliar antes o después que el fundamental, han sido estudiadas en otra serie de experimentos. Pero nosotros —en consonancia con el objetivo de nuestra investigación— hemos estudiado el papel de las condiciones internas y se ha visto que la efectividad en lo que respecta a la aplicación del problema auxiliar depende, en última instancia, del momento en que el examinando correlaciona los problemas (y no del momento en que se le presentan).

Es condición de la transferencia, por tanto, el que se efectúe el análisis de los dos problemas correlacionándolos entre sí, con la particularidad de que el principal papel corresponde al análisis del problema fundamental que ha de ser resuelto.

Del curso que sigue el análisis de este último, depende el momento y la manera de descubrir el eslabón común a la resolución de ambos problemas, así como, por tanto, la transferencia.

Pese a la multiplicidad de diferencias individuales que se hicieron patentes en el curso de los experimentos y que se manifestaron en la amplitud de los conocimientos utilizados, en la rapidez de la resolución, en la cantidad de eslabones del análisis, en los motivos aducidos en el razonamiento, etc., en todos los examinandos sin excepción pudo observarse la regularidad indicada en cuanto a la dependencia en que se encuentra la transferencia respecto al curso del proceso mental.

* * *

La transferencia de la resolución de un problema a otro comprende, como etapa final, la transferencia del principio en que la resolución se basa, pero en el curso de la resolución del problema es posible utilizar primero algunos eslabones aislados de la resolución. Hemos investigado, inicialmente, la transferencia de algunos de dichos eslabones; ahora pasamos a exponer los resultados obtenidos al investigar la transferencia del principio en su totalidad.

Al estudiar cómo se transfiere el *principio* de la resolución, se ha mantenido la misma *metodología* —orden en que se han presentado los problemas— que antes, si bien con la diferencia de que el problema auxiliar se ha presentado a todos los examinandos al mismo tiempo: en las etapas iniciales del análisis del problema fundamental (cuando renunciaban a solucionarlo).

En el problema fundamental se da un cuadrilátero cuyos lados están unidos entre sí, consecutivamente, por sus puntos medios. Se ha de demostrar que la figura resultante es un paralelogramo (fig. 8).

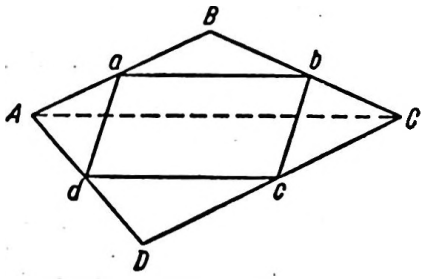

Figura 8

Una solución del problema fundamental (y del auxiliar) se basa en el teorema: "Si sobre el lado de un ángulo se sitúan segmentos iguales y por sus extremos se trazan líneas paralelas en el otro lado del ángulo se forman también segmentos iguales". Tracemos la recta *AC*. Sobre los lados del ángulo *ABC* señalemos segmentos iguales: *Aa* y *aB*; *Bb* = *bC* (ya que, según el enunciado del problema, están unidos los puntos medios de los lados). De ahí se sigue que las rectas *ab* y *AC*, que pasan por sus extremos son paralelas. También *dc* es paralela a *AC*; por consiguiente, *dc* es paralela a *ab*. De modo análogo *ad* es paralela a *bc*; por tanto, *abcd* es un paralelogramo, pues los lados opuestos son paralelos entre sí.

La segunda solución se basa en el corolario del teorema del ángulo cuyos lados están cortados por rectas paralelas: en el teorema de la línea media del triángulo, línea que pasa por los puntos medios de los lados, es paralela a la base e igual a su mitad. *ab* es la línea media del triángulo *ABC*; por consiguiente, *ab* es paralela a *AC*, $ab = \frac{1}{2} AC$. Asimismo, en el triángulo *ADC*; *dc* —línea media— es paralela a *AC*; por consiguiente, *ab* es paralela a *dc*. De modo análogo *ad* es paralela a *bc*.

En el problema auxiliar, se ha de demostrar que la línea media de un trapecio corta en dos partes iguales cualquier recta que una la base superior con la inferior (fig. 9).

La solución de este problema se basa en el mismo teorema del ángulo.

Desde el punto *C* se traza la recta CN^1, paralela a MN, que forma con *CD* el ángulo N^1CD, sobre uno de cuyos lados se

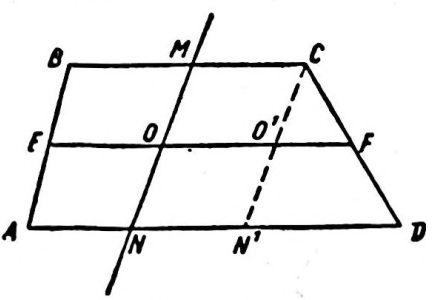

Figura 9

transportan segmentos iguales: $CF = FD$ (dado que, por construcción, EF es la base media). Por consiguiente, en el otro lado del ángulo también se forman segmentos iguales. De ahí que $CO^1 = O^1N^1$, y, por tanto, $MO = ON$, pues los segmentos de paralelas incluidos entre paralelas son iguales.

La segunda resolución del problema se basa en el corolario del teorema fundamental: el teorema de la línea media.

Al sujeto se le presentaron problemas cada uno de los cuales tenía dos soluciones con el fin de que al ser distinto el razonamiento geométrico de la resolución, aparecieran con más claridad las leyes generales en el curso de la transferencia.

Todos los examinandos resolvieron el problema auxiliar como problema por completo independiente, sin tener en cuenta el principal, cuando se les presentó en las etapas iniciales del análisis de este último. Después de resuelto el problema auxiliar, los examinandos, prosiguiendo la resolución del fundamental, comenzaron a correlacionar los dos problemas analizando uno de ellos en función del otro, separando, de este modo, sus términos comunes.

Examinemos de qué modo se efectuó el análisis en dichas primeras etapas de la resolución; he aquí una anotación típica:

Suj.: Lo que no veo es que tengamos aquí algún ángulo. Se nos ha dado un cuadrilátero. Sus lados son iguales, mejor dicho: no son iguales los lados, lo son los segmentos señalados en ellos. (Ensaya prolongar los lados). Si prolongamos BC y dc, obtenemos un ángulo. Pero de los lados de este ángulo no sabemos nada (fig. 10). Se nos dan en los lados segmentos iguales. Tomemos el ángulo BCD (fig. 11).

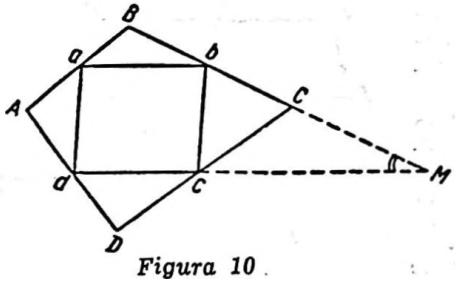

Figura 10

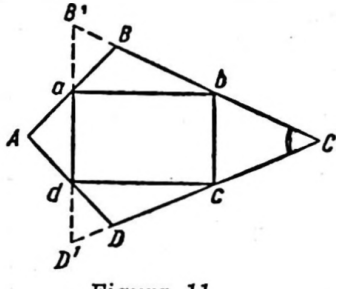

Figura 11

En un lado, $Bb = bC$, y en el otro $Cc = cD$. Esto es lo que se nos da. En el teorema hemos procurado demostrar que $Cc = cD$. Prolonguemos los lados del ángulo hasta que se corten con la prolongación de ad. Entonces $bc = ad$, aunque sabemos que $Cc = cD$, y que $Bb = bC$; pero no sabemos nada, todavía, acerca de DD' y BB'. Quizá sean iguales, pero aún hemos de demostrarlo. ¿Cómo lo demostraremos?

Después de resolver el problema auxiliar, el sujeto N. K., al volver al fundamental, dice: "No veo que tengamos ángulo en ninguna parte". Luego ensaya separar el ángulo ($< dMB$), prolonga un lado del cuadrilátero y los lados del paralelogramo. Trazado el ángulo, comienza a analizar la igualdad de los segmentos de sus lados y explica que "no sabemos nada de segmentos iguales en los lados de este ángulo". Después, el sujeto señala un nuevo ángulo, en cuyos lados se encuentran los segmentos iguales dados en los términos conocidos (ángulo BCD). A continuación, pasa al análisis de las rectas que cortan los lados del ángulo.

El examinando ve en nuevos conceptos (ángulo, segmentos iguales en sus lados y rectas paralelas que pasan por los extremos de los segmentos indicados) los términos conocidos del problema fundamental, dados inicialmente en determinados conceptos y nexos (cuadrilátero, sus lados divididos por la mitad). En los términos del problema fundamental encuentra los mismos elementos y propiedades que ha utilizado al resolver el problema auxiliar. Como se ve en la anotación, el descubrimiento de elementos geométricos y términos comunes a los del problema auxiliar, se realiza gradualmente: primero el examinando no ve ángulos de ninguna clase; luego, señala un ángulo cualquiera, de cuyos lados no sabe nada; finalmente, como resultado del análisis de los términos dados del problema acerca de los lados divididos por sus puntos medios, señala el ángulo en cuyos lados se han situado segmentos iguales.

El análisis de los términos del problema fundamental se lleva a cabo correlacionando dicho problema con el auxiliar.

Esto resulta sobre todo evidente cuando se establece una comparación con otras anotaciones de casos en que los exami-

nandos resolvieron el problema fundamental sin problema auxiliar (hicimos algunos experimentos de este tipo para comparar): en estos casos, los sujetos consideran la igualdad y el carácter isósceles de los triángulos, la igualdad de ángulos entre rectas paralelas, y, finalmente, intentan demostrar la semejanza de los triángulos, pero sin analizar el ángulo ni la igualdad de segmentos en sus lados.

Otros examinandos, que resolvieron el problema auxiliar partiendo del teorema sobre la línea media del triángulo, no aislaron en el problema fundamental el ángulo ni los segmentos iguales en sus lados, sino los puntos medios de los lados y las líneas medias que pasaban por ellos, es decir, elementos de otras características conceptuales.

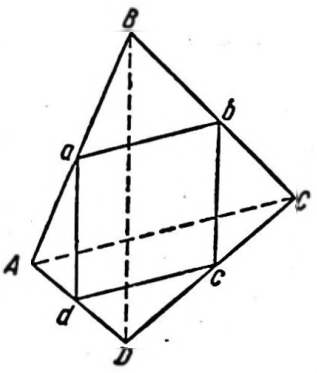

Figura 12

Por ejemplo, el *suj.* Z. P.: "¿Qué teníamos en el problema auxiliar? Se nos han dado puntos y una recta arbitrarios. Es necesario demostrar que la línea media divide al lado opuesto en partes iguales (fig. 12). Se nos dice, aquí, que *ad* al parecer es la línea media pues divide por la mitad los lados opuestos. Aquí hay una línea media sólo para el cuadrilátero. Aunque no, también la hay para los triángulos". Traza *AC* y *BD*.

El sujeto Z. P. señala en los términos del problema fundamental, la línea media, basándose en el análisis de uno de los datos del problema sobre las líneas medias y en una propiedad de la línea media: la de pasar por los puntos medios de los lados. No analiza otra de las propiedades de dicha línea: la de ser paralela a la base. El examinando señala primero la línea media como si lo fuera de un cuadrilátero; pero como resultado del análisis ulterior (distinción de triángulos en los términos del problema fundamental), la ve como línea media de un triángulo. Otros examinandos señalaron como línea media del cuadrilátero *ABCD* las rectas *ac* o bien *bd*, basándose asimismo en las propiedades de dichas líneas de pasar por los puntos medios de los lados. Resulta, pues, que todos los examinandos que resolvieron los problemas por otro procedimiento, también separaron, en un principio, en los términos del problema fundamental, elementos comunes a los del problema auxiliar (la línea media).

Vemos, así, cómo el proceso en virtud del cual el principio en que se basa la resolución del problema auxiliar se aplica a la resolución del fundamental, empieza con el análisis y la correlación de los objetos de los dos problemas dados en sus términos conocidos en conceptos distintos, los cuales, inicialmente, nada tienen de común entre sí. Gracias al análisis aludido, se descubre en los problemas algo de común (condiciones generales, elementos con propiedades comunes a las del problema auxiliar). El análisis permite descubrir en un problema condiciones comunes a las del otro (a las del teorema) esenciales para la resolución. El análisis del problema fundamental pone de manifiesto cuáles son los datos, propiedades y conceptos básicos que hacen posible resolverlo; se descubre en el problema lo que permite aplicar el principio. Entre los términos conocidos del problema fundamental y lo que se pide ha de encontrarse una determinada relación. Dicha relación, en su aspecto general, la proporciona el teorema (principio en que se basa la resolución del problema auxiliar). Cuando el análisis ha permitido descubrir en los problemas condiciones comunes, se da la posibilidad de proseguir el análisis y encontrar el principio mismo.

Para observar cómo transcurre el ulterior análisis del problema, proseguiremos el examen de la anotación del sujeto N. K. El sujeto analiza la relación entre el ángulo que ha señalado, con segmentos iguales en los lados, y el paralelismo de las rectas que forman parte de lo que se pide en el problema (*ad* y *bc*). Se aclara que una de las dos rectas (*bc*), cuyo paralelismo se demuestra en el problema, pasa por los extremos de los segmentos iguales en los lados del ángulo (dados en la formulación), mientras que la otra (*ad*), no pasa por dichos puntos extremos, sino que une los extremos de otros segmentos no iguales (no dados en la formulación del problema), continuación de los lados del cuadrilátero *BM* y *DN* (fig. 13).

Aquí tenemos, por tanto, que no se observa la correlación que constituye el contenido del principio, a saber: que las rectas son paralelas únicamente si pasan por los extremos de segmentos iguales. El examinando ve que la situación de las rectas que

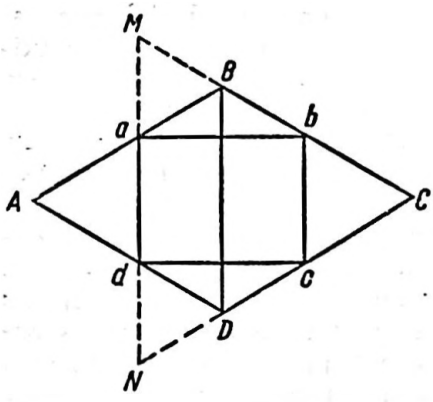

Figura 13

entran en lo que se pide en el problema no responde al principio general. Por este motivo, empieza a analizar por dónde debe pasar la segunda recta paralela para unir los extremos de segmentos iguales. Entonces traza en la figura la recta *BD*. Sin embargo, resulta que la recta *BD*, aun respondiendo al principio general, no responde a lo que en el problema se pide, a saber: demostrar el paralelismo de las rectas *bc* y *ad*. El ulterior análisis, en consecuencia, trata de establecer la conexión, dentro del problema, entre los nuevos datos (posición de la recta *BD*, que responde al teorema) y lo que se viene pidiendo (posición de las rectas *bc* y *ad*, cuyo paralelismo se ha de demostrar). Dicha conexión ofrece la posibilidad de que se aplique definitivamente el principio al problema, y se establece viendo que el paralelismo de las rectas *bc* y *ad* no se demuestra directamente, sino a través del paralelismo de cada una de ellas con la recta *BD*. De esta suerte, lo que se pide en el problema queda sustituido por otra proposición que lleva a la resolución partiendo del teorema.

Podemos observar de qué modo se efectúa el movimiento del análisis que descubre el principio. Primero, el examinando N. K. se convenció de que las rectas indicadas en lo que se pide en el problema no responden al contenido del principio a que se recurre. Se puso a buscar otra recta que pase por los extremos de segmentos iguales. Finalmente, después de haberla descubierto, examinó su relación no ya con los segmentos iguales, sino con otra recta, es decir, analizó su propiedad de ser paralela a otra recta (en consonancia con el principio), no sólo de pasar por los extremos de segmentos iguales. Pero el análisis no termina aquí. La recta encontrada, *BD*, no entra en lo que se pide en el problema; lo que se pide concierne a las rectas *bc* y *ad*. De ahí que el sujeto analice la relación de la recta *BD* respecto a lo que se pide en el problema: demostrar el paralelismo de las rectas *bc* y *ad*. De este modo se pone de manifiesto la conexión entre los nuevos datos, descubiertos en el decurso del análisis —datos que ofrecen la posibilidad de resolver el problema en consonancia

con el principio— y lo que se pedía al comienzo. El examinando dice: "Primero demostraremos que *BD* || *bc;* luego, que *BD* || *ad,* de donde deduciremos que *ad* || *bc*".

En esencia, lo que se pide en el problema queda sustituido por una nueva proposición, por una nueva exigencia, que abre el camino a la solución del problema sobre la base del principio.

Por la anotación transcrita vemos que si en las primeras etapas de la resolución del problema se delimitan los elementos generales de sus términos, los examinandos descubren luego la relación entre la igualdad de segmentos en los lados del ángulo y el paralelismo de las rectas. Los examinandos empiezan a ver la relación establecida en sentido general en el teorema en lo que tiene de aplicación a los datos del problema fundamental y a lo que se pide en él. Primero se relacionan los datos encontrados durante el análisis precedente y lo que se pedía en el problema. Pero resulta que, de este modo, queda alterado el nexo, la relación, entre la igualdad de los segmentos y el paralelismo de las rectas: la relación entre los datos así considerados y lo que se pide no responde al contenido del principio. Entonces los examinandos descubren nuevos elementos complementarios en los datos y en lo que se pide (por ejemplo, otras rectas paralelas), examinándolos en la misma relación que en el teorema.

Aplicando el principio a la resolución del problema, se estableció una relación determinada en el interior del mismo entre los nuevos datos, que responden al principio, y lo que se pedía en la formulación inicial.

Otros examinandos, que resolvieron el problema auxiliar aplicando el teorema de la línea media y en el decurso del análisis precedente señalaron una recta en calidad de línea media, siguieron analizando el problema del modo siguiente:

Suj. L. B.: "Tracemos, entonces, las diagonales del paralelogramo *ac* y *bd;* serán líneas medias en el cuadrilátero *ABCD,* o sea, pasarán a través de los puntos medios (fig. 14). Pero no serán paralelas a *AB* y *DC;* además, lo que necesitamos demostrar es el paralelismo de otros lados: *bc* y *ad* o bien *ab* y *dc*...".

El sujeto L. B. empieza examinando la relación entre la línea media y las rectas paralelas buscadas *ad* y *bc.* A medida que

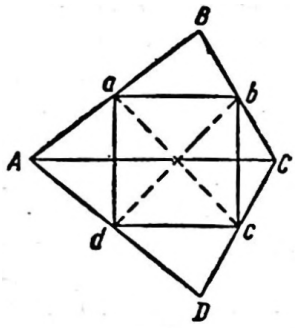

Figura 14

avanza en este análisis, ve que la línea media *bd*, tomada en nuevas condiciones —en el cuadrilátero— conserva su propiedad de pasar a través de los puntos medios de los lados, pero deja de ser paralela a las bases (*AB* y *DC*). Tomada en estas condiciones, se altera la relación entre la propiedad de pasar por los puntos medios de los lados y la del paralelismo de las bases (relación que constituye el contenido del principio). Por otra parte, en el decurso del análisis, el examinando L. B. descubre que, en estas condiciones, la línea media no guarda relación con lo que se pide en el problema: demostrar el paralelismo de *ad* y *bc*. De ahí que L. B. señale otra línea media (recta que posee las mismas propiedades, pero que, en realidad, hace posible proseguir el análisis, pues responde a lo que en el problema se pide). Traza la recta *ab* como línea media del triángulo *ABC*, la cual responde o lo que se pide ($ab \parallel AC$, $dc \parallel AC$ en $\triangle ACD$; por consiguiente, $ab \parallel dc$). Poniendo de relieve la nueva línea media, se establece la relación (en los términos del problema fundamental) entre la propiedad que tiene dicha línea de pasar por los puntos medios de los lados ($Aa = aB$, $Bb = bC$) y ser paralela a la base ($ab \parallel AC$), lo cual responde plenamente a lo que se pide en el problema (y, al mismo tiempo, al principio).

Así tenemos que en la segunda etapa de la resolución del problema, se descubrió en él la relación básica, común a los dos problemas e incluida de manera generalizada en el teorema; en el problema fundamental se vieron las condiciones que responden al contenido del principio aplicable y de este modo fue posible aplicarlo. Todos los examinandos señalaron la relación que constituye el contenido del principio aplicable a los términos del problema fundamental y a lo que en él se pedía. El establecer dicha relación —común al teorema y al problema—, el generalizar este método de resolución es lo que condiciona la "transferencia" del principio.

Vemos, por tanto, que en todos los examinandos (independientemente del procedimiento seguido para resolver

el problema), la dirección general del análisis fue la misma, se pasó de la delimitación de los términos del problema al establecimiento de la relación que constituye el contenido básico del teorema.

Todo este proceso en virtud del cual el principio se aplica a la resolución del problema se expresa en transformaciones y cambios de formulación que afectan tanto a los términos conocidos del problema como a lo que en él se pide.

Por lo general, al resolver un problema, los términos conocidos, iniciales, se cambian, quedan formulados de manera distinta.

En el cambio de formulación del problema, se traduce el trabajo mental en lo concerniente a la nueva correlación de datos separados sucesivamente por el análisis. Los resultados del análisis y de la síntesis encuentran su expresión en un hecho de lenguaje: en el cambio de formulación.

Los datos experimentales muestran que la transferencia, para la resolución del problema fundamental, del principio en virtud del cual se resuelve el problema auxiliar se manifiesta en los cambios de formulación, que se efectúan en *dos* direcciones básicas.

En la *primera* etapa, esos cambios parten *de* las formulaciones iniciales del *problema* que aparecen, como resultado, en los enunciados del teorema. Esos primeros cambios de formulación proporcionan las bases que hacen posible, más adelante, aplicar el principio a la resolución del problema.

Los cambios de formulación en la *segunda* etapa de la resolución parten *de* los enunciados del *teorema*. En consonancia con el principio, modifican su formulación todos los demás términos conocidos del problema y lo que se busca.

Por ejemplo, si en las primeras etapas del análisis lo que se pide en el problema se formula diciendo: "demuéstrese que las rectas *ad* y *bc* son paralelas", luego se dice: "demuéstrese que

ad y *bc* son paralelas como rectas que unen extremos de segmentos iguales en los lados del ángulo *BCD**; y después: "hállese una recta que pase por los extremos de segmentos iguales situados en los lados del ángulo *BCD*", y, finalmente: "demuéstrese que *BD* es paralela a *ad;* luego, que *BD* es paralela a *bc*, y, de este modo, que *ad* es paralela a *bc*".

A medida que se han cambiado las formulaciones, se ha ido concretando la relación común al teorema y al problema en tanto que es una relación aplicable a las condiciones del problema fundamental. Aparte de las condiciones puestas de relieve en el curso de los cambios de formulación efectuados en la dirección primera —en virtud de dichos cambios, el principio se aplica a la resolución del problema—, ahora, durante las modificaciones de formulación, se van señalando nuevos datos y su nueva relación respecto a lo que se pide, en consonancia con el principio general. De este modo, el problema cambia completamente de formulación.

Todo el proceso concerniente a la aplicación del principio en la resolución del problema se refleja en las transformaciones y en los cambios de formulación de sus términos y de lo que en él se pide, modificaciones que se efectúan en los dos sentidos indicados.

El primer proceso en los cambios de formulación responde a la necesidad de delimitar, en el problema, los elementos esenciales para su resolución; de este modo se perfilan los fundamentos que hacen posible recurrir al principio de otro problema, se encuentra la clave para resolver el primero. Con este proceso se lleva a cabo una generalización: se pone de manifiesto cuáles son los elementos básicos del problema comunes a los del teorema y cuáles son las correlaciones generales de los elementos del problema dado. Con ello, sin embargo, no termina el proceso de los cambios de formulación para poder aplicar el principio.

El segundo sentido en que se efectúan tales cambios, expresa el proceso en virtud del cual se va concretando,

* Esto se refiere al intento del examinando N. K. y a la fig. 13, pág. 30. (N. de la R.).

en función de los términos conocidos del problema fundamental, la tesis general incluida en el principio. En el decurso de dicho proceso, la relación básica que constituye el contenido del principio se conserva invariable, pero en el problema se descubren los elementos —o la correlación de los elementos con lo que se pide— que responden al principio general; éste se aplica al problema dado encontrando nuevos términos complementarios o poniendo de manifiesto nuevas correlaciones entre los elementos del problema (sus términos conocidos y lo que en él se pide). Mientras que el primer sentido de los cambios de formulación refleja de qué modo se van delimitando en el problema las bases para poder aplicar el principio, la segunda orientación remata dicho proceso dándole forma concreta.

Vemos, por consiguiente, que la transferencia del principio se basa en procesos de generalización y particularización que se efectúan a través de cambios de formulación en dos direcciones fundamentales.

Lo que exteriormente aparece como transferencia de proposiciones, de principios, de un problema a otro, constituye, en realidad, una elucidación de lo común y esencial en el decurso del análisis; el análisis es la condición interna de la transferencia.

Sabido es que el concepto de transferencia *(transfer)* arranca del behaviorismo. En general se entiende como transferencia de hábitos durante la enseñanza; pero también al ser examinada en el pensar, la transferencia se entiende únicamente como resultado. En la psicología pedagógica norteamericana, por regla general, se trata también del nexo entre la transferencia y la generalización.

Para explicar la transferencia, Thorndike presentó en 1901 la teoría de los elementos idénticos *(identical elements)*, formulada como resultado de los experimentos que llevó a cabo. Según Thorndike, sólo se transfiere una función a otra si ambas tienen en su composición elementos idénticos, es decir, comunes. En el ejemplo aducido por Thorndike, "el efecto obtenido en la suma se transfiere a la multiplicación porque la primera es absolutamente idéntica a una parte de la segunda y también porque algunos otros procesos —como el movimiento de los ojos y la

contención de todos los impulsos—, aparte de los aritméticos, son parcialmente comunes *(common)* para ambas funciones"[4]. Thorndike considera como condición de la transferencia, el que se den elementos idénticos o comunes en las funciones u operaciones, pero no la actividad para la generalización de las condiciones objetivas en que dichos actos se efectúan. Dicho elemento común está ya de antemano contenido en las funciones sin que el hombre que efectúa las acciones en cuestión haya llevado a cabo una generalización de condiciones; en realidad, sólo después de esta generalización son posibles las acciones generalizadas.

Judd[5] contrapuso a la teoría de Thorndike su teoría de la generalización *(theory of generalization)*. En sus experimentos, dos grupos de alumnos se entrenaban en arrojar un objeto contra un blanco situado debajo del agua. A uno de los dos grupos se le comunicaron datos teóricos científicos acerca de la refracción de la luz en el agua, cuya profundidad durante el ejercicio se variaba. Cuando se producía el cambio de profundidad, los alumnos que habían sido instruidos acerca de la refracción, aplicaban sus esfuerzos, teniendo en cuenta el cambio, con mucho más éxito y muchos menos errores que los alumnos a quienes no se les había dado las instrucciones indicadas. Del hecho expuesto infiere Judd que en la transferencia lo que importa no es la asimilación de habilidades especiales *(specific skills)*, sino comprender los principios generales de la refracción. Judd escribe que la aptitud para orientarse en la nueva situación depende de la generalización, por la que entiende los conocimientos teóricos[6]. La ventaja de la teoría de Judd frente a la de Thorndike consiste en el reconocimiento del papel de la generalización, de los conocimientos teóricos. Pero aun reconociendo la importancia de la generalización entendida como conocimientos teóricos, utilizados y asimilados por el alumno, Judd, como Thorndike, pasa por alto la actividad de la generalización, que conduce a la transferencia de dichos conocimientos.

Prosigue las investigaciones en el mismo sentido que Judd, Ernst R. Hilgard, quien, en uno de sus últimos trabajos, al estudiar el problema de la transferencia, cita las palabras de Judd según las cuales "la transferencia resulta posible no gracias a la

---

(4) *E. L. Thorndike*, "Educational Psychology", vol. II, New York, Columbia University, 1913, p. 358-359.

(5) *C. H. Judd*, "The Relation of Special Training to General Intelligence", Educ. Rev., 1908, vol XXXVI, p. 28-42.

(6) *C. H. Judd*, "Educational Psychology", Boston, Houghton Miffin, 1936, p. 509.

analogía objetiva entre dos problemas, sino gracias a la correspondiente aplicación, en la situación nueva, de un principio o de una generalización aprendidos en lo pasado"[7]. El autor se remite a los últimos experimentos de Hendricken y Schroeder (1941), en apoyo de la teoría de Judd. En el libro citado, Hilgard expone su teoría en la cual se examina el problema de si lo aprendido antes facilita o dificulta el orientarse en nuevas condiciones. Hilgard examina los cuatro casos siguientes. 1. El estímulo nuevo y el primero son análogos, las respuestas son idénticas; en este caso, se da una transferencia fuertemente positiva *(high positive transfer)*. 2. Los estímulos son distintos y las respuestas son idénticas; en este caso, la transferencia es débilmente positiva *(slight positive transfer)*. Hilgard explica dicha transferencia del modo siguiente: si tenemos una respuesta análoga en nuestro repertorio de respuestas aprendidas, es más fácil unirla a un nuevo estímulo, que aprender una respuesta y un estímulo nuevos. 3. Los estímulos son idénticos, las respuestas son parecidas, pero no idénticas; en este caso la transferencia es insignificante *(negligible transfer)*, lo cual se explica por la intervención de tendencias en contradicción con la respuesta oportuna. 4. Transferencia negativa *(negative transfer)*, cuando los estímulos son parecidos, pero no lo son las respuestas, lo cual también se explica por la intervención de una tendencia en conflicto[8].

El autor se remite al esquema de Osgood (1949), estructurado en tres dimensiones, y resume las relaciones básicas de su teoría. Uno de los índices de este esquema es el cambio en la analogía de las respuestas: se va de la identidad, a través del parecido, de la neutralidad y de la contraposición, al antagonismo de la respuesta. Al examinar el problema de la transferencia, de la semejanza de las respuestas o estímulos, de lo relacionado con lo condicionante *(conditioning)*, Hilgard introduce el concepto de gradiente de generalización *(gradient of generalization)*, del que depende la transferencia. Se llama gradiente de generalización al decrecimiento regular de la magnitud de generalización, incluida en la respuesta, decrecimiento que se produce al disminuir la analogía de un estímulo dado respecto al estímulo inicial, al ser condicionado un estímulo por otro[9]. A pesar de introducir nuevos conceptos, Hilgard, lo mismo que Judd, entiende por generalización relacionada con la transferencia (en particular con la transferencia positiva), la aplicación de viejos cono-

(7) Ver *E. R. Hilgard*, "Introduction to Psychology", New York, 1957, p. 266.
(8) *Ibíd.*
(9) *Ibíd.*, p. 578-579.

cimientos, de viejos principios, a una nueva situación. Algunas de las ideas expuestas por Hilgard permiten suponer que, a su juicio, el alumno, al realizar una transferencia, hace cierto trabajo mental. Así, por ejemplo, al definir la generalización[10], Hilgard dice que el alumno descubre el principio general para la clase de objetos, acontecimientos o problemas, si bien no analiza la actividad mental que conduce a dicho descubrimiento, pese a que el problema estriba, precisamente, en descubrir el proceso, el decurso —sujetos a ley— de la actividad mental cuyo resultado constituye la transferencia de la resolución de un problema a otro problema.

II. Dependencia en que se encuentra la actualización de principios generales respecto al análisis, a la síntesis y a la generalización

Investigación segunda

Por lo general, se entiende que la actualización —aplicación de conocimientos en la resolución de nuevos problemas— es un hecho no susceptible de ulterior descomposición y análisis. El concepto de actualización ocupa, en particular, un puesto central en una de las teorías del pensamiento más elaboradas, en la teoría de Zelts. Según Zelts, en la resolución de un problema, el eslabón básico del proceso mental es el de la actualización de conocimientos a que da lugar el problema como señal impulsora. Sin embargo, en Zelts, el nexo con el problema resulta puramente externo, mecánico.

Empleamos el término "actualización" por cuanto es utilizado para designar un hecho concreto, el de aplicar y utilizar conocimientos en la resolución de problemas. En la investigación psicológica, es necesario rechazar, en principio, la actualización entendida como hecho concerniente a la correlación entre los conocimientos actualizables y el problema; es necesario revelar el proceso mismo de la correlación indicada.

---

(10) *Ibíd.*

Metodología. La investigación se realizó sobre la base de resolver problemas geométricos mediante la aplicación de teoremas. Participaron en los experimentos veinticinco alumnos de las clases 8ª y 9ª de la escuela media (últimos cursos) y veinte personas adultas. Se indicaba a los examinandos que resolvieran por su cuenta un problema, cuya resolución implicaba actualizar un teorema determinado[11].

El problema planteado (del programa de la 7ª clase), era el siguiente: en un paralelogramo, los puntos medios de los lados opuestos están unidos a los vértices *B* y *D;* demuéstrese que las rectas obtenidas cortan la diagonal (*AC*) del paralelogramo en tres partes iguales.

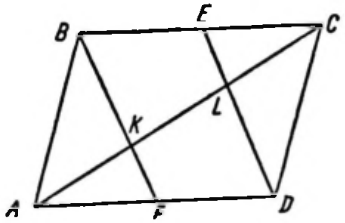

Figura 15

Solución del problema: las rectas *BF* y *ED* son paralelas (fig. 15), dado que *BFDE* es un paralelogramo (*BE* es paralela e igual a *DF* como mitades de los lados opuestos de un paralelogramo). Examinemos $< CAD : AF = FD$, $KF \parallel LD$, por consiguiente, $AK = KL$, según el teorema de que si en el lado de un ángulo se sitúan segmentos iguales y por sus extremos se trazan rectas paralelas, en el otro lado del ángulo quedan, asimismo, señalados segmentos iguales entre sí. De manera análoga se examina $< BCA : KL = LC$. Por consiguiente, $AK = KL = LC$, que es lo que se quería demostrar.

* * *

Los experimentos pusieron de relieve diferencias individuales en el carácter y modos de actualizar los conocimientos: en la rapidez de la actualización, en el volumen de los conocimientos actualizados, en la exactitud de su reproducción, en el carácter verbal o ilustrativo de la ac-

(11) Como regla general, los examinandos no podían reproducir por sí mismos el texto del teorema antes de resolver el problema.

tualización, etc. No obstante, pese a todas estas diferencias, se revelaron asimismo con toda claridad, las leyes generales que reflejan la dependencia en que se encuentra la actualización del teorema respecto al análisis del problema.

Los resultados de los experimentos hechos con un grupo de los alumnos nos indican que se dieron *dos vías o casos fundamentales de actualización.*

El *primero* de los casos, característico de la mayoría de los alumnos (trece de los veinticinco, o sea, el 52 %), consiste en que la actualización del teorema se efectuó en las etapas últimas del análisis del problema, al final mismo de la resolución, después de haber modificado reiteradamente los términos conocidos del problema y lo que se pedía. En el transcurso de dichas modificaciones, los términos conocidos y lo que se pedía —no relacionados directamente entre sí en su formulación primera— se fueron aproximando gradualmente hasta que se puso de manifiesto la relación buscada, coincidente con la del teorema sobre el que se basa la resolución. La aproximación de los elementos indicados en el curso de sus cambios de formulación, significaba que unos mismos objetos (elementos geométricos) iban viéndose en la misma relación recíproca en que se encuentran en el teorema objeto de actualización. Este descubrimiento gradual de términos y preguntas en el problema, comunes a los que están contenidos en el teorema, es lo que conduce a la actualización del mismo.

Los cambios de formulación concernientes a los términos conocidos y a lo que se pide en el problema, se llevaron a cabo a medida que términos y pregunta se correlacionaban entre sí; en el transcurso de la resolución del problema[12], no se formuló el teorema sobre el que ésta

(12) Esto no significa, naturalmente, que durante el análisis del problema, el examinando no relacione en general la resolución del problema con algunos otros teoremas (principios generales); sin embargo, esto aún no constituye una actualización.

se basa. Pero el análisis objetivo del decurso de la resolución pone de manifiesto que el contenido del teorema, sus elementos, fueron obteniéndose como si formaran parte del problema mismo. La actualización tuvo lugar cuando, en el curso del análisis del problema, los elementos iniciales de la formulación (a través de las reiteradas modificaciones que se llevaron a cabo) se manifestaron en nuevos conceptos, los mismos que se dan en el teorema. Los términos conocidos (y lo que se pedía) se trocaron en nuevos términos conocidos y nuevas preguntas que resultaron hallarse en la correlación expresada por el teorema y se enlazaban con él.

Por ejemplo, tomemos la formulación inicial del problema: "Tenemos un paralelogramo cuyos vértices *B* y *D* están unidos a los puntos medios de los lados opuestos. Demuéstrese que las rectas obtenidas cortan la diagonal del paralelogramo en tres segmentos iguales". En este problema se trata de un paralelogramo, de sus vértices, de los puntos medios de sus lados, de su diagonal, etc. Veamos, ahora, el primer cambio de formulación (véase más abajo la anotación Nº 14). "Demuéstrese que $AK = KL = LC...$ *BC* y *AD también* se dividen en partes iguales: en las mitades $BE = EC$, $AF = FD...$". En este caso, se delimitan segmentos iguales en los términos conocidos y en lo que se pide del problema, es decir, en cierto modo lo conocido y lo que se busca se aproximan entre sí, pese a que aún es desconocido por entero el teorema que contiene el nexo existente entre los elementos citados. En cambio, en la última formulación: "Ahora, de *F* parte $BF \parallel ED$, que corta a *AL* en el punto *K* y la divide, por tanto, en dos partes iguales; pero *BF también* parte del *punto medio* de *AD*, y si tomamos el triángulo *ALD*, resulta que de *F* y de *D* salen rectas paralelas", los términos conocidos y lo que se pide se encuentran en una aproximación máxima entre sí, se exponen con los mismos conceptos que figuran en el teorema, entre ellos se descubre la misma relación que se da en éste: la relación entre la igualdad de segmentos y el paralelismo de rectas (compárese con la formulación del teorema: "Si en el lado de un ángulo se sitúan segmentos iguales y por sus extremos se trazan rectas paralelas, en el otro lado del ángulo quedan, asimismo, señalados segmentos iguales").

Aunque todos los examinandos de este grupo que actualizaron el teorema en las últimas etapas de la resolución del problema siguieron un mismo camino, las resoluciones se diferenciaban entre sí por el papel que desempeñaba en la resolución final del problema el teorema actualizado.

Unos examinandos recurrieron al teorema en el momento final de la resolución del problema, ante la formulación última del mismo (cuando el examinando formulaba o citaba el teorema en que se basa la solución buscada); al llegar dicho momento, en realidad, la solución ya está hallada, el teorema se presenta como fundamentación, como referencia al principio general que confirma la justeza de la correlación hallada en el problema.

Aduciremos en calidad de modelo una de las anotaciones de la resolución efectuada por el grupo indicado de alumnos (anotación Nº 14). *Suj.:* Se ha de demostrar que AC se divide en tres partes, demuéstrese que $AK = KL = LC$. Anotemos lo dado. Si E y F son puntos medios, BC y AD también se dividen en partes iguales: en las mitades $BE = EC$, $AF = FD$. Tomemos los triángulos ABK y ELC, no, y LCD; son iguales, ya que $CD = AB$, y son, además, paralelas y los ángulos son iguales (señala los ángulos ABF y EDC, BAC y ACD).

Experimentador: ¿Y por qué $< ABF = EDC$?

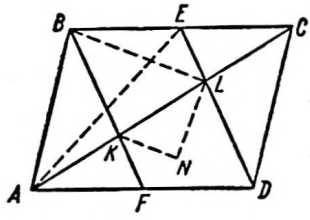

Figura 16

Suj.: Se ve por la figura... además, $BE||FD$ y le es igual... Así tenemos que $AK = LC$. Ahora demostraremos que $AK = KL$. Aquí hace falta completar... (fig. 16: une B con L). Ahora demostraremos que $AK = KL$ en el triángulo ABK y el triángulo BKL. BK —altura— divide por la mitad al triángulo ABL... No, no es esto... Podemos tomar el triángulo ABF, en el que está AK, y el triángulo AED (une A y E), en él está KL, y demostrar su igualdad; no, KL no cae por entero en el triángulo AED... No, sobre KL he de construir un triángulo igual a AKF, así lo hacíamos (traza las rectas que se unen en el punto N); no, de todos modos hay que demostrar que $AK = KL$... Tomemos el trapecio $ABED$; probablemente es ne-

cesario que en él *AL* se divida por la mitad... ¿No es la línea media? La línea media divide por la mitad... Si *AL* no fuera tan inclinada... Probablemente *BK* es la mediana del triángulo *ABL* y divide la base por la mitad; demostrémoslo. Pero no recuerdo ninguna de las propiedades de la mediana... El caso es, empero, que tenemos aún $BE = EC$, $AF = FD$, y *ABCD* es un paralelogramo. Probablemente es necesario tomar los triángulos *ABC* y *ACD*; $AB \parallel CD$, $BC = AD$, y *AL* queda cortada por las rectas *BF* y *ED*; pero hemos procurado demostrar que éstas también son paralelas. Pero de unos puntos, *B* y *D*, salen dos líneas paralelas, Sin embargo, necesitamos sólo demostrar que $AK = KL$, pues ya hemos demostrado que $AK = LC$... Del punto *A* parte la recta $AB \parallel CD$, pero no corta a *AL*... Ahora, de *F* parte $BF \parallel ED$, que corta a *AL* en el punto *K* y la divide, por tanto, en dos partes iguales; pero *BF* también parte del punto medio de *AD*, y si tomamos el triángulo *ALD*, resulta que de *F* y de *D* salen rectas paralelas. Cierto... Hay un teorema, no lo recuerdo con exactitud, según el cual las rectas que unen los puntos medios, si son paralelas, dividen al otro lado también por la mitad...

En otros examinandos, la actualización del teorema precede a la resolución definitiva del problema. El examinando lo formula antes de que todos los elementos de los términos conocidos del problema o de lo que en él se pide hayan sido vistos y formulados en conceptos comunes a los que se dan en el teorema. Entonces, partiendo de las formulaciones del teorema, los examinandos delimitan aún algunos términos complementarios, aplican el teorema al problema y lo resuelven.

El *segundo* caso de actualización, según se presentó en ocho de los veinticinco alumnos sujetos a prueba (el 32 %), estriba en que en diferentes etapas de la resolución del problema tenía lugar como una especie de actualización del teorema (los examinandos formulaban un teorema y, partiendo de él, se disponían a resolver el problema). Ahora bien, el teorema "actualizado" al comienzo de la resolución no era el que debía servir de base a la solución buscada, sino un teorema afín, parecido por su contenido conceptual, geométrico. (Véase acerca de este particular más adelante). Después de actualizar dicho teorema afín, los examinandos volvían al análisis del problema, y de él pasaban a modificar y puntualizar el teorema

inicialmente recordado; de nuevo proseguían el análisis del problema, y así sucesivamente hasta llegar a la actualización del teorema necesario. El teorema "actualizado" al comienzo de la resolución del problema se convertía en recurso de análisis del problema, se transformaba gradualmente, por correlación con el problema, en el teorema necesario, sobre el que se basa la resolución del problema.

Tenemos, pues, que la actualización real, también en este caso se efectuó de manera plena únicamente al final de la resolución del problema; mas, a diferencia de lo que ocurre en el primer caso, el camino que condujo a la actualización no pasó exclusivamente por la relación recíproca de los elementos —términos conocidos y lo que se pedía— del problema dado, sino a través de la correlación del problema con un teorema que se convierte en el teorema definitivo por medio del análisis a medida que se va puntualizando el problema.

Las resoluciones de los examinandos de dicho grupo se diferenciaban por el carácter del teorema al que recurrían. La mayor parte (seis alumnos) "actualizaron" un teorema análogo al que se necesitaba para la resolución (por regla general se trataba del teorema acerca de la semejanza de triángulos, en el que se hallaba contenida la misma dependencia: entre el paralelismo de rectas y la proporcionalidad de los segmentos formados entre ellas).

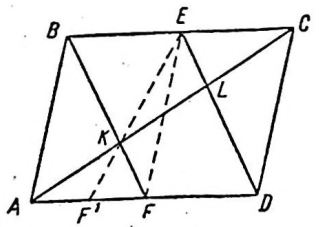

Figura 17

Transcribiremos a continuación un fragmento de la anotación Nº 8, del examinando E. S., quien resolvió el problema sobre la semejanza de triángulos del modo siguiente:

Suj.: Examinemos también los triángulos (fig. 17) ABF, F_1ED (traza EF_1 a través del punto K) y ECD; estos triángulos son semejantes, dado que sus lados son paralelos: $AB \parallel EF_1 \parallel CD$. Entran en ellos AK, KL y LC... No, estas rectas entran de manera

distinta. Es necesario tomar otros triángulos, *ABF* y *ACD*, en los que entran: *AK*, en el triángulo *ABF; KL* y *LC* en el triángulo *ACD; AB* || *CD*... No, tampoco es esto... Traza *EF*, une *E* con *F*. (ya no a través del punto *K*); los triángulos *ABF, FDE* y *EDC*... No (señala *AK, KL* y *LC*). Es necesario que todo esto entre en el triángulo *ACD*. ...Y el triángulo... ¡Los triángulos *ACD, ALD* y *AKF!* Son semejantes: *KF* || *LD*... No, *CD* ∦ *ED*. Qué hacer... en todo caso los triángulos *ALD* y *AKF* son semejantes...

La menor parte de los examinandos (dos de los ocho alumnos) actualizaron un teorema construido por ellos mismos (teorema sobre las paralelas cortadas por otras paralelas en segmentos iguales, pero formulado erróneamente, y el teorema sobre los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por otra recta, también erróneamente formulado).

La formulación del teorema tenía elementos comunes a los términos del problema analizados en el momento de la actualización, y también con el teorema correcto final al que llegaron, luego, los examinandos.

Tales son las dos vías o los dos casos fundamentales de la actualización del teorema, dados en la mayor parte de los examinandos.

Se destacó un grupo poco significativo de alumnos (cuatro de veinticinco: el 16 %), quienes reprodujeron enseguida el teorema (de memoria) sin analizar el problema. Dieron la formulación completa del teorema estudiado con anterioridad[13].

La subsiguiente resolución se efectuó como a continuación indicamos: el examinando, partiendo en este caso de conceptos contenidos en las formulaciones del teorema ya reproducido, discernía elementos de los términos conocidos del problema y de lo que se pedía en él, en los conceptos del teorema. En el transcurso de tales cambios de

(13) Ofrecemos, como muestra, una anotación de este tipo de resolución y el análisis correspondiente, al valorar los datos experimentales.

formulación, se concretaba la relación común, contenida en el teorema y aplicable al problema dado; en el problema se discernían en consonancia con el principio general los términos y la correlación entre ellos y lo que se pedía. Sin embargo, no todos los examinandos que supieron reproducir el teorema al comienzo mismo de la resolución, lo utilizaron luego; dos de los cuatro sujetos que formularon el teorema con exactitud, no pudieron aplicarlo al resolver el problema.

* * *

Los experimentos efectuados con el grupo de *adultos* pusieron de manifiesto que la actualización del teorema se efectuaba siguiendo los dos procedimientos que habían aplicado los alumnos. La mayor parte de los adultos actualizaron el teorema en las etapas iniciales del análisis del problema.

En realidad, no se actualizaba un teorema determinado en las etapas iniciales del análisis del problema, sino que los propios examinandos construían los "teoremas". Después de aducir un teorema de ese tipo para fundamentar la resolución, el examinando volvía al análisis del problema y ya partiendo de dicho análisis creaba una nueva variante del "teorema" y así sucesivamente, hasta llegar, de este modo, al teorema necesario y existente en realidad.

Además, la formulación de cada "teorema" aducido por el examinando en el curso de la resolución, reflejaba, en líneas generales, el nivel del análisis del problema en que se encontraba el examinando en el momento dado.

Examinemos, a guisa de ejemplo, la resolución del examinando M. F. (anotación Nº 41).

Suj.: ¿Es necesario demostrar la igualdad de los segmentos *AK*, *KL* y *LC*? ¿De los tres segmentos sucesivos que se forman al ser cortadas por una secante las rectas paralelas *BF* y *DE*? (ver fig. 15).

Experimentador: ¿Y por qué cree usted que son paralelas?

Suj.: Esto es elemental: *BC* y *AD* son iguales y paralelas, *BEDF* es un paralelogramo. Pero lo fundamental radica en ver cómo de la igualdad de segmentos en los lados de un paralelogramo se pasa a los segmentos buscados. Recuerdo mal todos estos teoremas. Hace tanto tiempo que los estudié... Pero de todos modos recuerdo que existe un teorema en el que se dice que *si dos rectas paralelas* (traza la fig. 18) *están cortadas por una tercera* (al experimentador: esto será *nuestra diagonal*), *y esta tercera, a su vez, está cortada por rectas paralelas* (esto serán nuestras *BF* y *DE*), *en dicha recta quedarán cortados segmentos iguales.* No, esto es demasiado complicado; el teorema que teníamos era más sencillo y más apropiado a nuestro caso: todas las rectas que se hallan en un mismo plano (y ya que tenemos un paralelogramo y su diagonal, tenemos un plano) al ser cortadas por rectas paralelas, se dividen en segmentos iguales... No, esto es estereometría... El problema es de planimetría, ¿verdad?

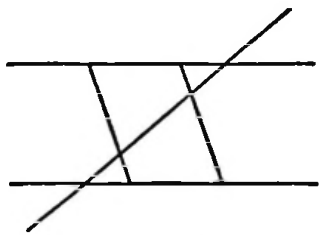

Figura 18

Experimentador: Sí.

Suj.: Esta tercera recta que corta a *AD* y a *BC* es la diagonal. Me parece recordar que existe un teorema según el cual si rectas paralelas cortan unos segmentos, los cuadrados de las diagonales son iguales al cuadrado de los segmentos de los lados, pero el que los cuadrados sean iguales no significa que sean iguales los segmentos... Para nosotros poco importa que $BE = KL$ y $EC = LC$, lo que nosotros necesitamos es que $KL = LC$, que $BE = EC$, y éstos ya son iguales... No, en este caso no necesitamos tomar todo el paralelogramo; nos limitaremos a esta parte, a estos cuatro segmentos, que están unidos por *BK* y *EL*... ¡Pero en el triángulo, todas las líneas medias son iguales!... No, no es esto; tenemos una línea media: *EL*, y si por un lado de la línea media se sitúan segmentos iguales y por sus extremos se trazan la línea media y la base, en el otro lado se forman también segmentos iguales...

Vemos por la anotación de qué modo la primera etapa del análisis del problema se refleja en la formulación del primer teorema "actualizado" por el sujeto: el examinando separó todas las rectas paralelas dadas en los tér-

minos conocidos del problema y la diagonal sobre la que se encuentran los segmentos buscados, y todo ello lo introdujo en la formulación del teorema. En las últimas etapas del análisis, el examinando "se limita" a diferenciar dos segmentos dados, *BE* y *EC*, y los buscados *KL* y *LC*, además de las rectas que los unen, lo cual se reflejó en la formulación aducida del teorema: cada par de segmentos se presentaba como lado de un triángulo; las rectas que los unen, como la línea media del triángulo, etc.

La actualización definitiva del teorema necesario se efectuó mediante la correlación gradual y el análisis recíproco del teorema "actualizado" durante el comienzo de la resolución y el problema.

Las resoluciones de los examinandos se diferenciaban algo entre sí por el carácter del teorema formulado en las etapas iniciales de la resolución y su cambio ulterior sobre la base del análisis del problema. La mayor parte de los examinandos (diez entre dieciséis) adujo un teorema cuya formulación estaba más o menos *tergiversada;* otros adujeron, en calidad de teorema, un principio general en realidad inexistente y que formularon en una etapa dada del análisis del problema.

Otros examinandos (tres entre dieciséis) formularon en *términos generales* la dependencia que intentaban demostrar (por ejemplo: "vamos a demostrar la dependencia entre el paralelismo de las rectas y la igualdad de los segmentos"; "intentaremos demostrar el paralelismo de las rectas en el sistema de Lobachevski"; "aquí se da cierta conexión entre la igualdad y el paralelismo, pues tal dependencia se observa siempre, en toda figura", etc.).

Finalmente, el tercer grupo de examinandos (tres personas) actualizó desde el comienzo mismo de la resolución, un teorema *análogo al necesario* (por ejemplo, acerca de la semejanza de triángulos), e introduciendo en él modificaciones en el transcurso del análisis, llegó al teorema que hacía falta.

En cuanto a la manera en que se utilizó, en el transcurso ulterior de la resolución, el teorema aducido inicialmente, también hubo diferencias entre los trabajos de los distintos examinandos.

Unos relacionaron durante todo el tiempo *el mismo* teorema, actualizado al comienzo, con el problema, modificando y precisando el primero a base del análisis efectuado.

Por ejemplo, el examinando B. P., en realidad, desde el primer momento actualiza el teorema que hace falta, pero formulándolo así: "$BE = EC$; $AF = FD$ y $AK = KL = LC$, porque existe un teorema que dice que si unas rectas son cortadas por otras paralelas, quedan cortadas en la misma proporción..." (fig. 19).

La segunda formulación del teorema aducida por el examinando, dice: "Si tenemos varias rectas y en una de ellas se dan partes iguales, en las otras se darán también partes iguales...". Esta formulación corresponde al análisis que el examinando ha efectuado del problema: para él todavía existen en los términos conocidos varias rectas, *BC*, *AD* y *AC*, pero el examinando no ha visto aún plenamente las relaciones existentes entre ellas. He aquí la tercera formulación del teorema dada por el examinando al final de la resolución del problema: "Si dos rectas que se cortan (compárese el ángulo en la formulación del problema. - *K. S.*) son cortadas a su vez por rectas paralelas de modo que sobre una de las primeras se dan ya partes iguales, y las paralelas cortan la línea según dichas partes, cortarán asimismo en partes iguales la otra línea recta...".

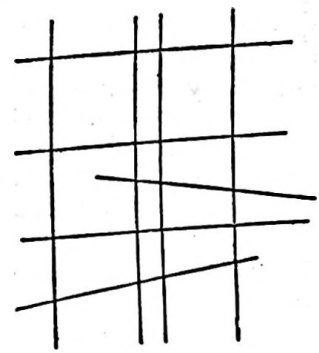

Figura 19

Otros examinandos "actualizaron" cada vez un teorema *nuevo* (véase la anotación Nº 41, ya aducida).

El tercer grupo de examinandos, después de actualizar al principio con imprecisión *dos teoremas* refundidos, con-

servó luego uno de ellos ya en su forma correcta partiendo del ulterior análisis del problema.

Por ejemplo, el examinando I. M. (anotación Nº 4) actualiza el teorema siguiente: "rectas paralelas al ser cortadas por una tercera recta, quedan divididas en segmentos iguales". Esto constituye una variante refundida de dos teoremas: el de los segmentos paralelos, que comprendidos entre paralelas son iguales, y el teorema del ángulo en cuyos lados, cortados por rectas paralelas, se forman segmentos iguales entre sí, etc.

Los experimentos demostraron, por consiguiente, que tanto entre los alumnos de la escuela media como entre las personas adultas se encuentran (en distintas correlaciones) dos casos y caminos típicos de actualización: en las etapas últimas y en las primeras del análisis del problema; el primero de los caminos conduce a la actualización del teorema correlacionando los términos conocidos del problema y lo que en él se pide, analizando recíprocamente sus elementos; el segundo de los caminos conduce al teorema no sólo correlacionando entre sí los términos del problema y lo que en él se pide, sino, además, correlacionando el problema con otros requisitos, principios generales, etc., que se presentan en forma de teorema "actualizable" ya en las etapas primeras del análisis del problema.

Vamos a examinar consecutivamente cada uno de dichos procedimientos, seguidos en la actualización del teorema.

Actualización en las etapas finales del análisis del problema

En una de las anotaciones típicas de nuestros examinandos veremos cómo se efectúa el análisis que lleva al sujeto a actualizar el teorema al final de la resolución del problema:

A modo de ejemplo transcribimos por completo una anotación típica, la anotación Nº 22 (suj.: A. V., alumno del último curso de la escuela media).

Suj.: "Escribamos lo que se nos da en el problema. Los puntos *E* y *F* se encuentran en la parte media de los lados... por tanto, $BE = EC$, y $AF = FD$. Además, *AC* —diagonal— se divide en tres partes iguales; se ha de demostrar, por tanto, que $AC : 3$ (escribe), no... sencillamente, *¡AK = KL = LC!;* hay que demostrar la igualdad de los segmentos (1).

Tomemos los triángulos *ABF* y *ECD*, son semejantes...

Experimentador: ¿Por qué?

Suj.: $EC \parallel AF$, $AB \parallel CD$, y $BF \parallel ED$... Aunque esto no nos es dado. De todos modos, son paralelas... se ve (fig. 20). Lo sé, pues $BE \parallel FD$, por tanto *BFDE* es un paralelogramo; además $BE = FD$, por tanto también $BF \parallel ED$... (2).

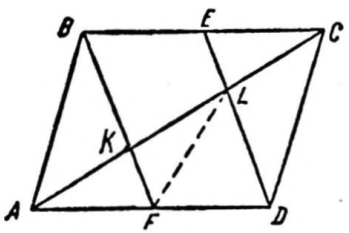

Figura 20

Experimentador: ¿Para qué quiere usted la semejanza de los triángulos?

Suj.: No, no, no son semejantes... lo que necesitamos es su equivalencia: $AF = EC$; $AB = CD$ y $BF = ED$, por tres lados... *AK* y *LC* son las alturas de los triángulos, por tando éstos son iguales... (3).

Experimentador: ¿Por qué? ¿Existe semejante teorema?

Suj.: No, son perpendiculares... aunque esto no nos es dado... Bueno, entonces tomaremos los triángulos *AKF* y *ELC* (4). Pues $EC = AF$, $AK = LC$; no, esto es lo que debemos demostrar; $\angle KAF = \angle ECL$, como alternos internos formados por rectas paralelas. Aún necesitamos los ángulos: $\angle KFA = \angle CEL$.

Experimentador: ¿Por qué?

Suj.: $AF \parallel EC$, bueno y $BF \parallel ED$ también, esto lo hemos demostrado; por tanto, los triángulos tienen todos los lados paralelos e iguales, y los triángulos también son iguales; por consiguiente, $AK = LC$. Ahora se ha de demostrar que $AK = KL$. Pero no veo bien lo que he de hacer con ellos... Tracemos *FL* y demostremos que el triángulo *AKF* es igual al triángulo *KFL*, pues tienen común el lado *KF*, y el lado $AF = FL$ (5). Pero no, se nos dice que $AF = FD$, y *FL* lo hemos trazado nosotros mismos... Por tanto, es necesario enfocarlo de otro modo. ¿Y si tomamos el triángulo *ABF* y el paralelogramo *BEDF*? *AK* y *KL* es una recta en estas dos figuras, una recta común, y según cierto teo-

rema, si dos figuras están cortadas por una tercera... no, este teorema no existe. ¿De qué es secante *KL* en el paralelogramo *BEDF*? No... no hace falta este teorema... No, si cortamos en segmentos a *AL*, no obtenemos nada... Hay que examinar esos segmentos no en figuras iguales, sino en una sola (6). ¿En cuál? Tomemos el triángulo *ALD*... Al otro lado de este triángulo hay algo igual (7). Escribe: $AK = KL$; demuéstrese que $AF = FD$ ya está dado. Y el tercer lado de este triángulo... La base es paralela a esa recta, que es la que corta en segmentos iguales. Pero esto es el teorema de que segmentos iguales en un lado de un ángulo dan también segmentos iguales entre sí en el otro lado (8). Así pues, tenemos $< DAL$ y $AK = KL$". (Hemos señalado con cifras los cambios de formulación del problema).

En el transcurso de la resolución del problema, se llevan a cabo varios cambios de formulación. Cada cambio de formulación de los términos del problema y de lo que en él se pide, expresa siempre verbalmente la delimitación de un nuevo contenido en los datos del problema mediante un cambio de correlación entre sus elementos. Examinemos qué contenido aparece en tales cambios de formulación respecto al resultado final, respecto al teorema.

En la formulación inicial del problema, se habla de un paralelogramo, de sus vértices, de los puntos medios de sus lados, de las diagonales y de otros varios elementos geométricos. Ya en el *primer* cambio de formulación, el sujeto A. V. de ese conjunto de relaciones y elementos dados en el problema separa una relación, común a los términos conocidos del problema y a lo que en él se pide, a saber, la de que en los elementos dados, figuran segmentos iguales, y se ha de demostrar que también lo son los segmentos que se buscan. El examinando hace abstracción de otros varios elementos: unos segmentos son partes de la diagonal; otros, son partes de los lados del paralelogramo; para el examinando, lo único importante es la propiedad común que los hace afines, el hecho de que unos segmentos y otros son iguales. El análisis de este cambio de formulación muestra que el examinando da el primer paso en dirección al teorema que todavía no ha ac-

tualizado (el teorema según el cual de la igualdad de unos segmentos se desprende la igualdad de otros), mas, por de pronto, le sigue siendo por completo desconocido el nexo entre tales segmentos.

El *segundo* cambio de formulación pone de manifiesto que se ha delimitado un elemento no dado en el problema: el paralelismo de las rectas *BF* y *ED*. Distintos examinandos llegan de manera diferente a señalar el paralelismo de las rectas indicadas, pero no vamos a detenernos sobre este particular. Ahora bien, la comparación con el contenido del teorema descubre que se trata de un nuevo paso hacia el teorema, dado que en éste la dependencia entre la igualdad de segmentos se define por el paralelismo de las rectas.

Sin examinar detenidamente todos los cambios de formulación del problema, nos detendremos aún, a modo de ejemplo, en los cambios sexto y séptimo.

El *sexto* cambio de formulación dice: "Hay que examinar esos segmentos (*AK* y *KL*. — *K.S.*) no en figuras iguales, sino en una sola...". Los elementos de los términos conocidos y de lo que se pide aún no han sido correlacionados entre sí en el interior de una determinada figura; el examinando aún no la ha delimitado; en cierto sentido, la formulación de lo que se pide, exteriormente, aún no ha sido relacionada con los términos conocidos del problema. Sin embargo, el procedimiento señalado para relacionar los elementos buscados en una sola figura y no en figuras distintas, coincide con lo dado en el teorema, según el cual las partes iguales se relacionan entre sí en el interior de una figura.

Finalmente, en la formulación *séptima*, la penúltima, el examinando delimita un determinado triángulo, en cuyos lados figuran segmentos iguales: los buscados y los dados en los términos del problema.

Si comparamos esta formulación con la primera, en la cual lo dado y lo que se pide se presentaba según la característica general de "segmentos iguales", resulta evi-

dente la sensible aproximación a que se llegó como resultado de todos los precedentes cambios de formulación: se ha concretado la parte necesaria de lo dado, la parte necesaria de lo pedido y, finalmente, se ha delimitado, entre todas las figuras contenidas en el dibujo, aquella en que dichas partes necesarias se correlacionan entre sí. Sin embargo, al cotejar la formulación con el teorema, resulta evidente que en esta etapa los términos dados y lo que se pide se encuentran todavía en una correlación que no conduce directamente al teorema: en éste, en primer lugar, segmentos iguales se presentan como lados de un ángulo, no de un triángulo, y, en segundo lugar —esto es aun mas importante— los segmentos son iguales sólo por hallarse formados por rectas paralelas. Pero este elemento del problema aún no ha sido analizado hasta el fin por parte del examinando.

La siguiente formulación, la *octava,* es, precisamente, la que revela el elemento señalado del problema correlacionándolo a la vez con lo que se pide y con los otros términos conocidos: no se ponen de relieve las rectas *BF* y *ED* señaladas inicialmente como paralelas, sino parte de ellas, las que entran en la composición del triángulo considerado (*KF* y *LD*). Este último eslabón del análisis del problema, aproxima hasta tal punto sus elementos conocidos y lo que se pide en características conceptuales generales, que la relación entre ellos se llena con el teorema actualizable; los elementos conocidos del problema y lo que se pide se encuentran en una relación recíproca igual a la que en forma general está contenida en el teorema indicado.

Con este último cambio de formulación, los elementos de los términos conocidos y de lo pedido en el problema, aparecen por entero en los conceptos del teorema: no ya como segmentos en los lados de un triángulo, sino como segmentos en los lados de un ángulo. Esta última formulación que realiza el examinando de los términos del problema constituye la actualización del teorema:

"pero esto es el teorema de que segmentos iguales en un lado de un ángulo dan también segmentos iguales entre sí en el otro lado...", dice el examinando A. V. (véase anotación Nº 22).

El análisis objetivo de todos los cambios de formulación del problema efectuados por el examinando en el transcurso de la resolución, pone de manifiesto que cada cambio constituye una delimitación y un restablecimiento de elementos y correlaciones del teorema que ha de ser actualizado, pese a que dicho teorema, como principio general, como enunciación de una dependencia general, únicamente aparece al terminarse la resolución del problema. El propio examinando no se da cuenta de que todo el proceso de la resolución no es otra cosa que una actualización gradual del teorema: éste se le aparece únicamente al final mismo, cuando lo formula como dependencia general, con la particularidad de que dicha dependencia se le presenta como de manera inesperada. El hecho es, sin embargo, que el teorema se presenta como generalización de la relación básica, cuando tal relación ha sido ya descubierta en el problema como correlación entre sus términos conocidos y lo que se pide. Ahí radica la clave de la sorprendente "concordancia" del conocimiento que aflora (teorema), respecto al problema. Esta correspondencia parece inexplicable si se señala sólo el resultado, el teorema formulado en último término por el examinando; pero resulta perfectamente lógica si se sigue el proceso todo del análisis, en el decurso del cual el examinando, sin darse cuenta de ello, paso a paso, al analizar las relaciones concernientes a los datos del problema, va restableciendo el teorema, lo obtiene.

En la variante extrema de este caso, el teorema apareció cuando en realidad ya se había encontrado la solución del problema: sirvió únicamente de fundamentación, de comprobación del resultado obtenido ya al margen del teorema, por medio del análisis del problema mismo.

Como vemos en la anotación que acabamos de transcribir, la formulación del teorema —que constituye, al mismo tiempo, el último cambio de formulación del problema— en el fondo es una referencia al principio general que ratifica la solución encontrada; formula la misma dependencia descubierta ya por el examinando en los elementos del problema. En el presente caso, por ende, la formulación del teorema, en realidad, se limita a confirmar la actualización ya llevada a cabo.

La necesidad de pensar al resolver el problema está condicionada por el hecho de que lo desconocido, inserto en lo que se pide del problema, para el sujeto no está ligado directamente a los términos conocidos iniciales. El proceso de la resolución del problema, estriba en definir, paso a paso, las variables y relaciones desconocidas e intermedias, ligadas con los términos conocidos del problema y con lo que en él se pide de tal modo que dichos elementos desconocidos se vayan infiriendo de los conocidos y respondan a lo pedido. Todo el proceso está dirigido a buscar la relación gracias a la que, en última instancia, se cierra el nexo entre los términos conocidos del problema y lo pedido. La expresión generalizada de dicha relación estriba en el teorema sobre el que se basa precisamente la solución del problema dado. Tenemos, pues, que el hallazgo del teorema necesario no obedece a la casualidad: todo el proceso de la resolución está dirigido, de manera sujeta a ley, hacia dicho resultado. En cierto modo, el teorema se restablece partiendo del problema y durante el análisis del mismo.

La actualización del teorema al final de la resolución del problema. en las últimas etapas del análisis, constituye una manifestación externa del proceso interno del análisis del problema, proceso que, en todo su decurso, la ha ido preparando.

Al actualizar un teorema en los términos concretos particulares de un determinado problema, tiene lugar, en

realidad, una generalización de la relación fundamental del problema en el teorema, se concreta el segundo respecto al primero.

Actualización en las etapas primeras del análisis del problema

Examinemos de qué manera se actualizó el teorema en las primeras etapas de la resolución del problema, según una de las anotaciones típicas de nuestros examinandos.

Anotación Nº 4. Suj. I. M.

Suj.: Tenemos un paralelogramo y una de sus diagonales; se ha de demostrar que $a = b = c$. Aquí las rectas son paralelas (señala *BC* y *AD*) y en ellas hay segmentos iguales, por lo que también han de ser iguales los segmentos en *AC* (señala *BE* y *FD*). Se ha de demostrar que estas rectas son paralelas. Demostremos primero que son iguales... Entonces todos los segmentos serán iguales...

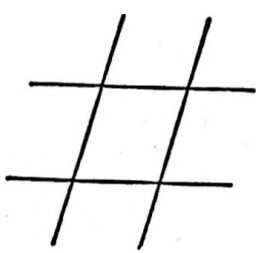

Figura 21

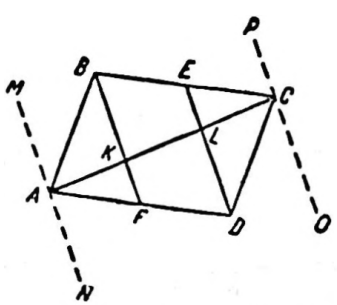

Figura 22

Examinador: ¿Por qué?

Suj.: Porque existe un teorema según el cual rectas paralelas, al ser cortadas por una tercera recta, quedan divididas en segmentos iguales... (Traza una figura) (fig. 21). Partiremos de que $BF = ED$ y demostraremos que $BF \parallel ED$. En primer lugar:

$DC \parallel AB$ y $DC = AB$, $AF = EC$, los ángulos también son iguales siendo las rectas paralelas; por tanto, el triángulo ECD es igual al triángulo ABF. Por consiguiente, los segmentos BF y ED, por una parte, son iguales, y, por otra, están incluidos entre BE y FD que son iguales y paralelos.

Experimentador: Esto no resulta claro.

Suj.: Examino $BFDE$. En él, $BE \parallel FD$ e igual; me parece que existe una propiedad, según la cual, si en las figuras dos lados son iguales y paralelos, los otros lados también lo son... Demostremos ahora que $a = b = c$...

Tracemos las rectas paralelas MN y OP (fig. 22). Dichas rectas paralelas pasan por los puntos A y C a distancias iguales de B y E. Por tanto, también se encuentran a distancias iguales entre sí dichos segmentos... ¿Se nos ha dado que $AB = BE$? Me parece que no; sólo $BE = EC$ y $AF = FD$; de todos modos eso,

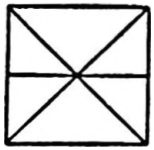

Figura 23

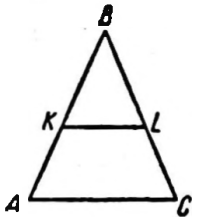

Figura 24

naturalmente, también es cierto... Pero creo que existe, además, un teorema según el cual la línea que une... la recta que pasa por el punto medio de la hipotenusa paralelamente a la base divide al lado opuesto por la mitad... Aunque no estoy convencido de que este triángulo BKC sea rectángulo... Triángulo BKC: la recta EL pasa por el punto medio de la hipotenusa y es paralela a la base... Veamos... (traza las figuras 23 y 24). Me parece que existe esta línea en los triángulos en general (traza la línea KL), creo que se llama línea media; eso es: pasa por los puntos medios de los lados y es paralela a la base. Y esto es todo: $b = c$, y en el triángulo ALD, $a = b$.

El análisis de la anotación revela que el examinando, en el momento mismo de comenzar a resolver el problema, ve la relación fundamental entre los objetos a que se refieren los términos conocidos del mismo y lo que en él

se pide (igualdad de segmentos indicados en la formulación del problema, respecto a la igualdad de los segmentos buscados, igualdad que ha de formarse dado el paralelismo de las rectas *BF* y *ED* que unen dichos segmentos).

El análisis de las formulaciones de los teoremas aducidos por diferentes examinandos ha puesto de manifiesto que el teorema actualizado al comienzo de la resolución no coincidía en su mayor parte con el teorema en que se basa objetivamente la solución del problema.

Al principio, el examinando aduce una formulación errónea del siguiente teorema: "los segmentos de paralelas, comprendidos entre paralelas, son iguales entre sí" (el examinando traza una figura relativa a este teorema, la fig. 22). En el teorema así formulado aparece como fundamental la relación de igualdad de segmentos entre sí en una de las rectas paralelas; de este modo, se tergiversa la relación propia del teorema, donde se examina la igualdad de segmentos en dos rectas paralelas (al ser cortadas por otras rectas paralelas). El cambio de contenido del teorema, al que, en algunos casos, el examinando tergiversa. está condicionado por los resultados del análisis del problema y depende de dicho análisis. El examinando distingue en su aspecto general la dependencia entre el paralelismo de las rectas y la igualdad de los segmentos entre sí en uno de los lados paralelos; en consonancia con ello, actualiza un teorema parecido en el que también figura la dependencia entre el paralelismo de las rectas y la igualdad de segmentos, pero lo modifica de modo que responda a los datos conocidos y a lo que se pide en el problema (que los segmentos sean iguales entre sí en un lado). La composición del teorema "actualizado" refleja con exactitud el análisis llevado a cabo del problema. (Entre las rectas paralelas está incluida la "tercera" recta *AC*, sobre la que se encuentran los segmentos buscados. Es esta "tercera" recta la que el examinando, en consonancia con el análisis llevado a cabo, introduce en la formula-

ción del teorema ("al ser cortadas por una tercera"), tergiversando, así, la formulación real del teorema.

Después el examinando utiliza este teorema, construido por él mismo, correlacionándolo con el problema, para el ulterior análisis de este último. Descubre la falta de correspondencia entre dicha proposición general y los términos reales del problema (en los términos conocidos figura sólo $BE = EC$, pero no se dice que $AB = BE$; por otra parte, resulta que los segmentos iguales no están entre las rectas paralelas, etc.). El análisis del problema pone al descubierto nuevos elementos, nuevas correlaciones y lleva a la actualización de un nuevo teorema, es decir, a una nueva generalización que se expresa en el enunciado de una nueva proposición general.

El teorema que ahora se actualiza refleja la siguiente etapa del análisis del problema: en sus elementos se destaca como parte esencial para la resolución la recta ED — EL, que une precisamente los segmentos iguales dados en los términos conocidos con los segmentos "iguales" que se busca; en consecuencia, el teorema se formula diciendo; "la línea que pasa por el punto medio de la hipotenusa paralelamente a la base, divide al lado opuesto por la mitad."

Mientras que el primer teorema formulado por el examinando expresa únicamente en términos generales el nexo delimitado en los elementos del problema entre el paralelismo de las rectas y la igualdad de segmentos, el teorema dado expresa más plenamente el análisis que del problema ha llevado a cabo el examinando: el nexo concreto, mediante determinadas rectas paralelas, entre determinados segmentos (dados en los términos conocidos del problema) y los segmentos buscados. La "actualización" de dicho teorema constituye nuevamente la elaboración, por parte del examinando, de un teorema inexistente; como en el primer caso, el sujeto no recuerda el teorema, sino que lo rehace en consonancia con las necesidades del análisis del problema, en consonancia con el grado del análisis

en que se encuentra. Luego, relacionando dicho teorema con el problema y prosiguiendo el análisis de este último, llega, al final, a actualizar el teorema necesario.

Cada teorema actualizado en el decurso del análisis del problema, representa la formulación en términos generales de la relación entre los datos conocidos del problema y lo que se pide en él, delimitada por el sujeto en cada etapa dada del análisis. Además, cada generalización va seguida de un nuevo análisis de las relaciones entre los objetos del problema, análisis que, a su vez, conduce a una nueva generalización.

El sujeto restablece el teorema por sí mismo, como resultado del decurso del análisis del problema; es como si reconstruyera el teorema a medida que analiza el problema, y no se limita a recordarlo, a reproducirlo mecánicamente. El teorema actualizado durante el curso de la resolución se convierte, luego, en medio para el ulterior análisis del problema. La actualización del teorema necesario, dada al final de la resolución, refleja tan sólo el último proceso del análisis del problema. En el movimiento que va del problema al teorema inexistente; de éste, otra vez al análisis del problema y, por él, a la actualización del teorema necesario, se hace patente el papel preponderante de todo el análisis del problema en la actualización del teorema.

De este modo, los dos casos fundamentales de actualización se aproximan entre sí dado que, en ambos, el auténtico teorema, en su formulación adecuada, se actualiza únicamente en las etapas más tardías de la resolución del problema.

Entre los examinandos que actualizaron el teorema en las etapas primeras del análisis del problema, hubo un grupo muy pequeño que reprodujo enseguida el teorema necesario sin análisis del problema.

A título de ejemplo, transcribimos entera la anotación Nº 35 (*suj.* I. F., alumno del octavo curso de la escuela media).

Suj.: Es necesario demostrar que $AK = KL = LC$. Escribiremos lo dado: $BE = EC$, $AF = FD$, $ABCD$ es un paralelogramo. Pero recuerdo que hemos estudiado un teorema sobre segmentos iguales: "si en un lado de un ángulo hemos señalado segmentos iguales y por sus extremos se trazan rectas paralelas, en el otro lado del ángulo se forman también segmentos iguales". Tomemos el ángulo DAB; en uno de sus lados están señalados los segmentos AF y FD, por cuyos extremos pasan rectas paralelas...

Experimentador: ¿Cuáles?

Suj.: BF y ED. Pero $BFDE$ es un paralelogramo...

Experimentador: Dígame, ¿por qué?

Suj.: $AD = BC$; no, esto no lo necesitamos, pero si AD y BC se dividen por la mitad, tenemos que $BE = FD$: las mitades son iguales y los lados opuestos son paralelos; por tanto, tenemos otro paralelogramo. Así, pues, $AF = FD$; $BF = ED$; por consiguiente, en el otro lado del ángulo también se forman... Pero el caso es que ED no corta a AB, y lo que necesitamos es la igualdad de AK y KL... No, tomemos el ángulo de modo que allí caigan AK y KL, y también LC... Tomemos el ángulo ACD... Entonces $KF \parallel LD$... Sí, pero en el teorema se dice que las rectas paralelas han de pasar por los extremos de segmentos iguales... Por tanto, es necesario tomar el ángulo CAD, pues estas paralelas KF y LD han de unir segmentos iguales y sabemos que AF y FD son iguales. Entonces, $AK = KL$...

La anotación nos dice que el teorema se actualizó en el comienzo mismo de la resolución del problema, cuando los datos conocidos, al parecer, aún no habían sido analizados en lo más mínimo. En este caso, el examinando reproduce, simplemente, la formulación del teorema, que le es conocido. Pero, al hacerlo así, no se efectúa un amplio proceso de generalización, sino que entran en movimiento generalizaciones preparadas, ya formadas, a modo de proposiciones generales, de teoremas, de conocimientos que al enfrentarse con un nuevo problema enseguida comienzan a influir sobre la resolución del mismo.

Luego —como muestra el decurso ulterior de la resolución— empieza a aplicarse al problema el teorema reproducido. En este caso, el examinando comienza enseguida a analizar los términos conocidos del problema según las características del teorema actualizado: señala, pri-

mero, un ángulo ($< DAB$), en uno de cuyos lados están señalados los segmentos iguales AF y FD; resulta luego que, en primer lugar, el otro lado de dicho ángulo no queda cortado por las rectas paralelas, y, en segundo lugar, que los segmentos buscados ocupan en el interior del ángulo una situación indeterminada. De este modo, delimitados así los términos conocidos del problema, no le resulta congruente la relación básica del teorema; el teorema no se conjuga con el problema. Acto seguido, el examinando, formulando de otro modo el problema, destaca otro ángulo ($< ACD$) basándose en el hecho de que en uno de sus lados se hallan situados los segmentos que se buscan. Finalmente, delimita en los términos conocidos del problema la relación básica del teorema (entre la igualdad de segmentos y el paralelismo de las rectas) y cambia por última vez la formulación del problema (se separa $< CAD$, en uno de cuyos lados se encuentran los segmentos iguales dados en los términos conocidos del problema, y en el otro lado se encuentran los segmentos buscados). Dicho cambio de formulación era, en realidad, lo que constituía la actualización del teorema. En esencia, la actualización del teorema en función del problema, con la aplicación del primero al segundo, tuvo lugar durante el último cambio de la formulación del problema, pues sólo ésta descubre en los términos conocidos y en lo que se pide, los elementos que responden a los que se dan en el teorema y en la misma correlación (se resalta, precisamente, el ángulo en cuyos lados se encuentran los segmentos buscados y los conocidos, y no un ángulo cualquiera con segmentos iguales en los lados).

El curso que sigue el proceso de actualización del teorema y su aplicación al problema es análogo, en este caso, al que se observa al transferir el principio de la solución (del teorema) de un problema a otro: el proceso mental parte de los procesos incluidos en la formulación del teorema reproducido al comienzo mismo de la resolución, tiende a delimitar los términos conocidos del proble-

ma y lo que en él se pide en consonancia con las correspondientes características del teorema, y luego, a descubrir la relación, dada en el teorema, entre los términos conocidos del problema y lo que en él se pide. El análisis del problema se lleva a cabo correlacionándolo con el teorema reproducido, lo cual conduce, en última instancia, a aplicar el teorema al problema, es decir, a la actualización del primero, plenamente realizada.

Vemos, por tanto, que también en este caso, cuando la actualización se presenta directamente en forma de repetición, de simple reproducción del teorema, no queda sustituido por esto el análisis del problema, el análisis que lleva a la actualización. También en este caso el análisis resulta necesario, si bien tiene lugar después de reproducido el teorema, no antes. La actualización incluye en sí, además, los procesos de la memoria y del pensar. Cuando la actualización se efectúa como resultado de todo el curso del análisis a que se somete el problema, en ella se da, en cierta medida, la reproducción del teorema. Cuando nos encontramos ante el hecho de la reproducción, se presupone, asimismo, el análisis, consciente o inconsciente, del problema. La cuestión sólo estriba en la faceta que, en cada caso dado, aparece en el primer plano de dicho proceso.

Según una idea hondamente arraigada, cuando el problema se resuelve aplicando un principio general, la resolución se divide en dos etapas: la primera —etapa creadora— consiste en la obtención del principio; la segunda, en la aplicación del principio al problema. De semejante descomposición en etapas hablan, por ejemplo, Duncker y varios de nuestros autores. Los datos experimentales obtenidos ponen de manifiesto que este esquema formal no revela la ley a que obedece el decurso concreto del proceso, no tiene en cuenta la interacción constante, ininterrumpida, entre la actualización del teorema y el análisis de las relaciones de los términos del problema. Ni en un caso ni en otro están separados entre si el aná-

lisis del problema y la obtención del teorema como si formaran etapas hetegoréneas: se hallan entretejidos mutuamente. Cuando la actualización se da al final de la resolución del problema, en las etapas últimas de su análisis y en el caso extremo en que el teorema, en general, no participa en el proceso de la resolución, sino que sirve únicamente de "fundamento" y ratifica que la solución hallada es correcta, cada proceso en la resolución del problema, cada eslabón del análisis, constituye un elemento que elucida relaciones entre objetos, relaciones que, en su aspecto general, están contenidas en el teorema. En realidad, por tanto, cada paso en la resolución del problema significa que se obtiene un eslabón del teorema que, como base lógica, aparece sólo al término de la resolución.

Incluso cuando la actualización del teorema tiene lugar en las primeras etapas del análisis del problema, el proceso no se descompone en dos etapas externas: una de actualización del teorema y otra de aplicación del mismo. Aunque la resolución del problema empieza, realmente, con la actualización del principio, frecuentemente se "actualiza" un teorema no esencial, o la formulación tergiversada de un teorema y, a veces, de dos teoremas fusionados, próximos por su contenido conceptual al del teorema necesario. Téngase en cuenta, además, que semejante alteración no se debe a un defecto de la memoria, sino que refleja el grado a que ha llegado, en la etapa dada, el examinando en el análisis del problema. Todo el curso ulterior de la resolución del problema constituye una interacción del análisis de las relaciones entre los datos en el problema y en el teorema, constituye el restablecimiento del teorema con el que se halla ligada la solución del problema, restablecimiento que se efectúa mediante la construcción de varios teoremas. En el transcurso de dicho análisis tienen lugar, al mismo tiempo, tanto el análisis y la resolución del problema, como el restablecimiento en forma adecuada del teorema al que va ligada la resolución del problema.

I. M. ZHUKOVA

EL PAPEL DEL ANALISIS Y LA GENERALIZACION EN LA ACTIVIDAD COGNOSCITIVA

En las fuentes del conocimiento se encuentra la *acción*. Conocimiento y acción están interconectados. Al principio, el conocimiento se da directamente vinculado a la actividad práctica; únicamente más tarde se separa formando una actividad cognoscitiva especial, teorética. No hay que contraponer de ningún modo acción y conocimiento como cosas externas entre sí; por consiguiente, no hay que representarse los hechos, en el aspecto genético, como si al principio hubiera acción sin conocimiento (y luego, correspondientemente, conocimiento sin acción). En toda acción práctica del hombre está ya incluido el conocimiento sensorial que, reflejando la realidad objetiva, las condiciones en que se efectúa la acción, regula esta última. De ningún modo cabe reducir la acción, exclusivamente, a su parte ejecutiva y considerarla como algo puramente externo.

El conocimiento, al reflejar en general la realidad, reproduce también la acción del hombre sobre los objetos. Algunas operaciones mentales, en particular las básicas, elementales (por ejemplo las aritméticas), reproducen las acciones prácticas de los hombres al operar con cosas (por ejemplo la operación aritmética de la sustracción reproduce la operación práctica de sacar uno o varios objetos de una multiplicidad dada). Además, los resultados de dichas operaciones sobre los objetos (tanto prácticas como mentales) están determinados por la correlación de los objetos sobre los cuales aquéllas se producen, sus propiedades y relaciones. Tales correlaciones sirven para definir las reglas a que se subordinan, en la ciencia,

las correspondientes operaciones mentales. Las operaciones no sólo mentales, sino, además, prácticas, sirven como medios de análisis, como recursos para poner de manifiesto las correlaciones que se dan entre los objetos y sus propiedades.

Cuando un niño resuelve un problema práctico que se le plantea (alcanzar un caramelo de un recipiente, etc.) mediante pruebas prácticas, en la operación participa ya la vista. Si, al principio, el problema resulta insoluble sin ayuda de pruebas prácticas, y luego puede resolverse simplemente de manera visual, ello atestigua que, en el proceso de la acción, se ha producido un cambio de la percepción visual: se ha hecho otra la percepción misma, no sólo su manifestación externa. Es misión de la investigación psicológica descubrir en qué consiste esta línea del desarrollo del conocimiento, en cuyo decurso la percepción se eleva a un nivel más alto del análisis, de la síntesis, de la generalización, y pone de manifiesto las condiciones internas, ocultas, gracias a las cuales se pasa de la resolución del problema por medio de pruebas prácticas, de acciones, a la resolución puramente cognoscitiva, por medio del conocimiento, separada ya del hacer práctico. A elucidar este problema se consagra el presente trabajo.

* * *

Es bien sabido que los niños, al principio, resuelven por medio de pruebas de tipo práctico, de acciones, el problema que se les plantea, y sólo de manera gradual pasan a resolverlo sin operar prácticamente con los objetos, por medio del exclusivo análisis mental.

Semejante paso de la resolución práctica del problema a la resolución puramente cognoscitiva, significa que ha cambiado esencialmente no sólo el procedimiento de la acción del niño, el procedimiento con que éste resuelve el problema; significa, además, que se ha modificado la cognición del niño, la manera misma de percibir la situación en que su acto se realiza. La tarea del psicólogo,

por tanto, no se limita a registrar el cambio en el procedimiento de actuación, en el modo de resolver el problema, sino que consiste, además, especialmente en descubrir el proceso de desarrollo de la cognición sensorial de los niños y poner, así, de relieve las condiciones internas de semejante transición, sin circunscribirse a tomar nota de sus distintas etapas y a describirlas según su faceta externa. La presente investigación experimental se consagró a la resolución del problema indicado. Se llevó a cabo con niños de tres a seis años de edad.

La metodología de los experimentos consistió en lo que sigue: Se entregaba al niño un recipiente de cristal en cuyo fondo había un pequeño caramelo con un lazo de alambre. Al lado del recipiente, había instrumentos de cuatro formas distintas: seis palitos, seis ganchos pequeños, cinco ganchos grandes y tres ganchos doblados (en realidad, éstos eran ya lazos). Dichos instrumentos se diferenciaban entre sí no sólo por la forma, sino, además, por el color. De los veinte instrumentos, siete estaban pintados de color rojo; seis, de color azul, y siete, de color blanco. Entre los instrumentos de una misma forma, los de cada color eran aproximadamente iguales en número.

Se decía al niño que alcanzara el caramelo por el lazo mediante un instrumento. Estaba prohibido volcar el recipiente. Para resolver este problema (ideado al estilo de los que utilizó en sus experimentos A. Rey), el niño debía hallar un instrumento de determinada forma (un gancho *pequeño*). Utilizando los palitos y los demás ganchos, no podía hacerse con el caramelo.

Se llevaron a cabo tres series de experimentos (cada vez con examinandos distintos).

En la I serie, se presentaba a los niños instrumentos de forma y color diferentes. El color, propiedad físicamente más señalada que la forma, no era una característica esencial ni señalizadora (de la propiedad esencial del instrumento). Condiciones semejantes en que la propiedad esencial no se destaca de la suma de las propieda-

des dadas del objeto, se encuentran con gran frecuencia en la vida, y por esto resultan las más naturales.

Para resolver el problema, el niño debía encontrar, delimitar, la condición esencial y generalizarla, es decir, 1) aislar la forma del instrumento haciendo abstracción del color, y 2) analizando la forma de los instrumentos, discernir la que responde a lo que se pide en el problema (el gancho pequeño). La resolución del problema requería, pues, un análisis compuesto de dos eslabones fundamentales.

A veces, los elementos necesarios pueden encontrarse por casualidad incluso antes de efectuar el análisis y la generalización de los términos dados. Por ejemplo, el niño, casualmente ya en la primera prueba puede tomar el instrumento necesario. Para evitar una solución casual y también para poder observar el proceso del análisis y de la generalización, así como también para poder controlar el proceso de la resolución, se presentaron en cuatro etapas los instrumentos necesarios para resolver el problema.

En la primera etapa, los niños recibían instrumentos de todas las formas, adecuadas y no adecuadas a la solución del problema. En las etapas segunda y tercera se presentaban únicamente los instrumentos adecuados, y en la cuarta, lo mismo que en la primera, el experimentador volvía a presentar instrumentos de todas las formas dadas (positivas y negativas). La resolución acertada, en la primera etapa, resultaba poco firme sin el "refuerzo" negativo que los examinandos recibían en las etapas segunda y tercera.

En la II serie de experimentos, a diferencia de la primera, se presentaban instrumentos únicamente de un color (el blanco), pero de distinta forma. El niño, por ende, ya no necesitaba aislar la forma como rasgo esencial y hacer abstracción del color. De este modo quedaba eliminado un eslabón del análisis, el más difícil. En la II serie la resolución del problema también se dividía en cuatro etapas.

En la III serie de experimentos, como en la primera, se presentaba a los niños instrumentos de forma y color distintos. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en la primera serie, el color brillante, al principio era señal de la forma adecuada (del gancho pequeño) y luego señalaba una forma impropia para la resolución del problema.

Las condiciones en que se presenta el problema en la I serie de experimentos son las más naturales, pero son, también, las más difíciles para el análisis y la generalización, dado que los elementos esenciales (forma de los instrumentos) no se hallan separados de todas las condiciones dadas. En las dos series restantes, dichos elementos se diferenciaban de una u otra manera. En la II serie no hacía falta abstraer la propiedad esencial (la forma del instrumento) de la que no lo era (el color): todos los instrumentos que se presentaban a los examinandos eran de un mismo color, por lo que las condiciones esenciales resultaban, físicamente, las más señaladas. En la III serie la delimitación de las condiciones esenciales se llevaba a cabo con ayuda de una propiedad físicamente más intensa, pero no esencial (el color).

La variación experimental de las condiciones en que transcurría la resolución del problema permitieron responder a la cuestión que teníamos planteada acerca de las leyes a que obedece el paso de la resolución del problema mediante pruebas en el plano de la actuación práctica, a la resolución del mismo problema en el plano por completo visual o mental. Si este paso depende realmente del desarrollo de la cognición del niño, de su percepción, de su análisis sensorial, generalización, etc., al modificarse (de una serie de experimentos a la otra) las condiciones en que dicho análisis se lleva a cabo, cuando se transforma el curso del proceso cognoscitivo, ha de modificarse en consonancia, inevitablemente, el carácter mismo del paso indicado: éste se efectúa tanto más rápidamente cuanto más fácil resulte al niño analizar los términos del problema, y viceversa. Si el paso indicado no de-

pendiera de la evolución del análisis, el cambio de las condiciones en que este último se efectúa no ejercería sobre aquél ninguna influencia esencial.

Examinemos a continuación los principales resultados de los experimentos llevados a cabo (por series).

* * *

En la I serie, los examinandos tenían que realizar *el análisis de los instrumentos por el color y por la forma.* Al principio, *en la primera etapa,* a los niños se les dio instrumentos de todas las formas y de todos los colores.

De los diez examinandos, sólo uno no logró resolver el problema a pesar de realizar gran número de pruebas. Los demás niños, por la cantidad de pruebas que necesitaron hacer para alcanzar el resultado positivo, se dividieron en dos grupos. Los del primer grupo (cinco sujetos) efectuaron por término medio diez pruebas prácticas para resolver el problema. El segundo grupo encuentra la solución, por regla general, enseguida, a la primera prueba. (Sólo un niño de este grupo resolvió el problema, es decir, tomó el instrumento con un gancho pequeño, en la segunda prueba).

Examinemos aparte los resultados de la primera etapa de los experimentos de la I serie con cada grupo de niños.

Las primeras — entre dos y cuatro — pruebas de los sujetos del *primer* grupo nos dicen que los niños, al principio, delimitan físicamente las propiedades más señaladas de los objetos, en el caso dado, el color, que no era esencial ni señalizador de la propiedad esencial (la forma), e intentan alcanzar el resultado positivo eligiendo sucesivamente instrumentos de todos los colores.

El hecho de que los sujetos, al principio, aíslen el color explica el gran número de pruebas y la sustitución de un instrumento por otro en las primeras pruebas.

De este modo, si la aplicación de un instrumento de un color no conducía al éxito, y no se consolidaba, el niño tomaba un instrumento de otro color incluso si el instrumento tenía la misma forma que el precedente. Tan sólo después que el niño hubo probado instrumentos de todos los colores (sin que ninguno de ellos resultara positivo), empezó a aislar la forma. Los niños observan enseguida la diferencia de formas de los instrumentos, lo mismo que la diferencia de color, pero sólo de modo gradual aprenden a diferenciar las formas con vistas a su utilidad para la resolución del problema.

Dado que, en las circunstancias del problema dado, el color no es ni propiedad esencial ni propiedad señalizadora, no se consolida. Mediante una síntesis práctica, mediante la correlación entre las condiciones en que se efectúa el problema y su resolución, el examinando separa otra propiedad: la forma. El hecho de aislar, de diferenciar la forma como propiedad está directamente ligadc a la resolución del problema, aproxima al niño a la solución. Pero la forma no se abstrae del color repentinamente. Como ninguno de los tres colores queda consolidado, el color, en cierto modo, se desplaza a un segundo plano y para el examinando en el primer plano se presenta la forma, pero no de por sí, sino en íntima vinculación con el color. No se da una abstracción total del color; éste ha perdido su prioridad, pero todavía desempeña cierto papel como componente del objeto "forma más color". El sujeto comienza a diferenciar y a generalizar los instrumentos según dos características (el color y la forma) que ahora se presentan al examinando como si constituyeran un todo único. Como quiera que se dan tres colores y tres formas básicas, el número de combinaciones que entre ellas pueden hacerse es bastante elevado. Para llegar a diferenciar un instrumento de una forma, el niño ha de probar, por lo menos, tres instrumentos (tres colores) de dicha forma. Pero si se tiene en cuenta que se dan también instrumentos de otras formas negativas, re-

sulta claro por qué para diferenciar las dos formas negativas el examinando del primer grupo tiene que hacer de ocho a diez pruebas.

Se puede comprobar, en consecuencia, que la abstracción de la forma respecto al color, es decir, respecto a la propiedad físicamente más señalada, no se elabora de golpe. Únicamente después de reiteradas pruebas infructuosas con las formas negativas (palitos y ganchos grandes) de cualquier color, se hace total la abstracción del color. A la vez que se efectúa esta abstracción, se diferencian y generalizan las formas negativas.

En la última prueba, cinco de los examinandos del primer grupo encuentran el instrumento de la forma necesaria. Ello atestigua que la abstracción del color y de las formas negativas había preparado la distinción de la propiedad esencial del instrumento (el gancho pequeño). Así se explica que las pruebas infructuosas no sean simplemente acciones erróneas, sino un análisis y una síntesis prácticos de los elementos del problema.

Por consiguiente, los niños que buscan la forma de instrumento que les es necesaria, pasan a la solución puramente visual del problema —sin pruebas prácticas— al final de la primera etapa. Los cinco examinandos indicados recorren en la primera etapa tres grados de análisis: 1) del análisis de los instrumentos según el color; 2) el análisis de los instrumentos según la forma y el color (grado intermedio del análisis); 3) el análisis de los instrumentos únicamente por su forma.

Cada nuevo grado constituye un análisis de elementos más complejos del problema. En el primer grado, se analizan los elementos del problema más señalados físicamente, en el caso dado, no esenciales. En el segundo grado, se analizan elementos más complejos del problema, que incluyen en sí tanto sus condiciones esenciales como las que no lo son. En el tercer grado, se analizan sólo las condiciones esenciales.

Otro es el panorama con los cuatro examinandos del *segundo* grupo, los que enseguida (o en la segunda prueba) toman el instrumento necesario. Como demuestran las subsiguientes etapas, la delimitación de la propiedad esencial en la primera tuvo lugar en ellos de manera casual, sin ningún análisis ni generalización. Pero gracias al resultado positivo, los niños aislaron la forma positiva.

Por consiguiente, cabe formular las siguientes conclusiones:

1. Todos los examinandos, sin excepción, resuelven el problema, al principio, mediante pruebas de tipo práctico.

2. Para distinguir la propiedad esencial (la forma del instrumento), los examinandos necesitaron hacer abstracción del elemento no esencial físicamente más señalado (el color del instrumento). La abstracción necesaria para poner de relieve la condición físicamente menos señalada, constituye un proceso gradual y largo.

3. Mientras se diferencian las condiciones esenciales y se hace abstracción de las que no lo son, los examinandos, en la primera etapa, recorren tres grados en el análisis de los instrumentos: 1) por el color, 2) por la forma y el color, y 3) por la forma.

4. El análisis de las condiciones puestas de relieve, independientemente de que sean o no esenciales para la resolución del problema, comienza con la simple diferenciación (por caracteres físicamente visibles) que no requiere pruebas y que se hace posible gracias a la actividad de los órganos de los sentidos. La distinción por el significado, es decir, la diferenciación, van haciéndola los examinandos en el curso de sus actuaciones.

5. En la primera etapa, la cantidad media de pruebas para cada examinando es de seis o siete.

En la segunda etapa, se daba a los examinandos instrumentos de los tres colores, pero de una sola forma, negativa (palitos). Con semejantes instrumentos no es posible sacar el caramelo del recipiente.

En los experimentos de esta etapa participaron sólo ocho niños (de los diez anteriores).

A la pregunta del examinador: "¿Puedes sacar el caramelo con estos palitos?", todos los niños contestaron afirmativamente. Vitia P., quien, en la primera etapa, había tomado enseguida el instrumento que necesitaba, pregunta: "¿Con qué palito se puede sacar?". Nata I. repara enseguida en la falta de instrumentos con ganchos, pues dice: "Veo que no hay ganchos". Pero esto no provoca en ella dudas en cuanto al éxito de la prueba.

Nata I. y Galia K. eligen palitos de los más delgados, los palitos no eran del todo iguales por su grosor), es decir, distinguen en los instrumentos una nueva característica que, de todas las propiedades existentes en las condiciones concretas dadas, es la más aproximada a la característica esencial.

Vitia P., Sasha K. y Kolia R., quienes en la primera etapa hicieron sólo una prueba, que resultó positiva, toman un instrumento de color rojo, es decir, del color que tenía la forma positiva. En sus pruebas procuran ensayar todos los colores dados. Los tres examinandos dejan de seguir haciendo pruebas sólo después de la tercera o cuarta.

Zhenia J., quien en la primera etapa hizo dos pruebas, hace otras tantas en la etapa segunda. Este caso puede explicarse por el hecho de que en la primera etapa, gracias a la intervención del experimentador[1], la niña realizó una firme diferenciación de la forma positiva. El hecho indicado hizo más fácil alcanzar un éxito rápido en todas las etapas.

También realizó pocas pruebas, en esta etapa, Galia K., pese a que en la etapa primera efectuó seis.

---

(1) La niña cogió al revés el instrumento con un gancho pequeño, después de lo cual el experimentador le indicó que diera la vuelta al instrumento.

Respecto a Vitia P., Sasha K. y Kolia R., quienes en la primera etapa efectuaron, cada uno de ellos, una sola prueba, no puede hablarse para nada de que hubieran hecho abstracción del color. No diferencian las formas negativas, es decir, no han hecho ni siquiera un análisis basto de las formas. Esos niños comienzan a realizar el análisis en la segunda etapa. Para este grupo de examinandos, la diferencia de formas apareció ya en la primera etapa, después del resultado positivo, pero los niños no diferencian la forma teniendo en cuenta su aplicación. Semejante diferenciación de formas comienza a elaborarse en la segunda etapa, cuando se hace abstracción del color. En este caso, en virtud de las condiciones que han surgido, los niños diferencian simultáneamente los objetos por dos caracteres: forma y color. No realizan el análisis de los instrumentos sólo por el color y ello reduce el número general de pruebas.

Para hacer definitivamente abstracción del color y diferenciar una de las formas negativas, al examinando le basta seleccionar tres o cuatro instrumentos. Estos examinandos recorren sólo dos grados del análisis: 1) el análisis de los instrumentos por el color y la forma; 2) el análisis de los instrumentos sólo por la forma.

Observamos otra cosa en el caso de los niños que en la primera etapa realizaron gran número de pruebas (Galia K., Nata I., Svieta V. y Vova A.).

Galia K., en la segunda etapa, hizo sólo dos pruebas. La abstracción del color, a la que había llegado en la primera etapa, se conserva en la segunda. Para restablecer una diferenciación grosso modo y la generalización, le bastan a la muchacha dos pruebas.

Se encuentran en una situación especial tres de los examinandos (Svieta V., Vova A. y Nata I.), que en esta etapa realizaron gran número de pruebas. Al parecer, el análisis del color y de las formas negativas en la primera etapa había de tener, como consecuencia, que las pruebas resultaran totalmente innecesarias o quedaran re-

ducidas a un escaso número en la segunda etapa. No obstante, el número de pruebas, en el caso de estos niños, no sólo no resulta menor que el de los otros niños, sino, al contrario, mayor. Esto permite llegar a la conclusión de que la diferenciación de las formas, en el caso de los niños citados, se llevó a cabo siguiendo otro camino: el de la división de los instrumentos en ganchos pequeños y bastoncitos, como formas positivas, y los ganchos largos como formas negativas. La abstracción del color y la diferenciación de las formas negativas resultaron poco firmes, y en la segunda etapa se desmoronaron.

Resumamos:

1. Pese a que todos los niños habían distinguido, al final de la primera etapa, la forma positiva, en ninguno de los examinandos la diferenciación y generalización de instrumentos por la forma se consolidó firmemente: en la segunda etapa, los niños continúan recurriendo a las pruebas.

2. El proceso en virtud del cual se hace abstracción del elemento no esencial (color del instrumento) físicamente relevante, continúa en la segunda etapa.

En los niños que en la primera etapa efectuaron sólo una prueba, el hecho de haber diferenciado la forma positiva (el gancho pequeño) consolidó ya dicha forma en la misma primera prueba; ésta es la razón de que los niños empiecen el análisis de los instrumentos inmediatamente según dos caracteres: el de la forma y el del color. (Resulta, pues, que la distinción de la forma, aunque sea por casualidad, acelera el proceso gracias al que se diferencian los elementos esenciales). En este caso, los niños, en vez de pasar por tres grados del análisis, pasan por dos: el análisis de los instrumentos por la forma y el color y, luego, el análisis únicamente según la forma.

3. En la segunda etapa, las pruebas se interrumpieron sólo después de efectuados los procesos de diferenciación y generalización.

Los resultados de la resolución del problema por par-

te de varios niños que utilizaron en la segunda etapa muchos instrumentos han demostrado que el proceso de la generalización puede ser muy largo. La cantidad media de pruebas para un examinando, en la segunda etapa, es de cuatro (en la primera etapa, es de seis o siete).

En la tercera etapa, a los niños se les daba instrumentos de todos los colores, pero otra vez de una sola forma (ganchos largos), con los cuales tampoco es posible alcanzar el caramelo.

Svieta V. y Vova A. enseguida piden los ganchos pequeños, en vez de los ganchos que se les ha dado, largos y doblados. Nata I. elige un gancho doblado, lo desdobla y procura alcanzar con él el caramelo. Después de un intento infructuoso también pide el gancho pequeño. Son, precisamente, estos tres niños los que más pruebas hicieron en las etapas primera y segunda.

Los otros cinco niños, a la pregunta del experimentador: "¿puedes alcanzar el caramelo con estos instrumentos?", responden afirmativamente. El número de pruebas que en la tercera etapa realizan estos niños es el siguiente: Kolia R., dos pruebas; Sasha K., dos; Zhenia J., tres; Vitia P., cuatro, y Galia K., cinco.

Todos los sujetos eligen los instrumentos independientemente del color.

Tres de los niños (Svieta V., Vova A. y Nata I.) resuelven el problema de manera puramente visual, sin pruebas de tipo práctico. En la primera etapa, dichos niños efectuaron el análisis de la forma en el sentido de dividir los instrumentos en dos grupos contrapuestos: por una parte, palitos y ganchos pequeños, como instrumentos adecuados; por otra parte, ganchos largos y doblados, como instrumentos no adecuados. La diferenciación de una de las formas negativas (el gancho grande) se alcanza, por parte de estos niños, en la primera etapa, y resulta tan firme, que se conserva incluso en la tercera etapa; la diferenciación de la otra forma negativa se realiza definitivamente tan sólo en la etapa segunda.

Partiendo de los hechos expuestos, pueden inferirse las siguientes conclusiones:

1. Los niños que realizaron el mayor número de pruebas en las etapas primera y segunda, resolvieron el problema de modo puramente visual, sin pruebas de tipo práctico, en la tercera etapa. Este hecho confirma la conjetura de que, en el curso de pruebas erróneas que no se consolidan, los examinandos realizan el análisis de los instrumentos.

2. El número de pruebas, en la tercera etapa, es menor que en la etapa segunda, y su carácter pone de manifiesto que la abstracción del elemento no esencial (color de los instrumentos) se ha efectuado ya en las dos primeras etapas. La cantidad media de pruebas para un examinando es igual a dos.

3. En la tercera etapa, los examinandos diferencian la segunda forma negativa (el gancho grande).

En la cuarta etapa, a los niños se les dieron los veinte instrumentos, o sea, los instrumentos de todas las formas y colores.

Todos los niños encuentran de inmediato el instrumento que posee la propiedad fundamental indispensable para alcanzar el resultado positivo. A menudo se trataba de un instrumento de color distinto al del instrumento de la forma reforzada en la primera etapa.

El proceso de análisis y generalización, en la cuarta etapa, se efectúa sin acción práctica externa. Así lo atestigua el carácter de la resolución del problema efectuada por los niños en la cuarta etapa que, por sus condiciones, no se diferencia en nada de la primera: los niños encuentran (precisamente *encuentran*) el instrumento que posee la propiedad esencial para resolver el problema. La diferencia que existe entre la conducta de los niños en la primera etapa y en la cuarta es muy grande y nos dice que la percepción del niño entre las dos etapas indicadas experimenta un profundo cambio gracias al proceso de diferenciación, gracias a la abstracción y generalización de

las propiedades esenciales y de las que no lo son en el proceso que tiene lugar cuando se manejan directamente los objetos.

Si se toma el número global de pruebas en las cuatro etapas teniendo en cuenta los dos grupos establecidos en la primera, resulta que los índices de las pruebas son, en ellos, distintos.

Los niños del segundo grupo, que efectuaron sólo una prueba en la primera etapa y comenzaron la diferenciación desde el primer momento por dos caracteres (color y forma), es decir, analizaron los instrumentos no sólo por el color, alcanzan un resultado positivo antes que los niños del segundo grupo. El número global de pruebas, en los examinandos del segundo grupo, abarcando todas las etapas es de siete, mientras que en los del primer grupo dicho número es de doce a trece.

Resumiendo, cabe formular las siguientes conclusiones acerca de la primera serie de experimentos:

1. Para pasar de la resolución de un problema a partir de pruebas de tipo práctico, a la resolución puramente visual, sin tales pruebas, los niños han de llevar a cabo el análisis y la generalización de los elementos esenciales del problema. Antes de analizar tales elementos, los niños necesitan hacer abstracción de todos ellos respecto a los que sin ser esenciales, son más señalados desde el punto de vista físico (en el caso dado, el color).

La abstracción de los elementos no esenciales, físicamente más relevantes, se lleva a cabo gradualmente, mediante su análisis. Tenemos, pues, que para alcanzar el resultado positivo, los examinandos, en las condiciones en que se efectúa la primera serie de experimentos, han de pasar por dos grados de análisis: 1) el análisis de los instrumentos por el color, 2) el análisis de los instrumentos por la forma. En cada nuevo estadio del análisis, el sujeto se encuentra con condiciones más complejas. De ahí que cuanto menor sea el número de elementos no esenciales físicamente relevantes del problema, tanto menor será el

Universidad de Oviedo

número de pruebas y tanto más fácil resultará el camino para diferenciar los elementos esenciales y los no esenciales.

2. La distinción de los elementos esenciales, incluso si es casual, acelera el proceso de su diferenciación, dado que conduce al análisis simultáneo de los elementos, esenciales o no.

3. El análisis de los elementos esenciales en la I serie de experimentos se hizo mediante la delimitación del elemento esencial a través de la diferenciación de todas las propiedades no esenciales (palitos y ganchos largos).

Para llegar a la diferenciación definitiva de la propiedad esencial (el gancho pequeño) el examinando necesitó llevar a cabo, por término medio, de doce a trece pruebas[2].

Resulta, pues, que la diferencia en la conducta de los niños, en las etapas primera y cuarta es muy grande. Ello es una prueba de que entre las dos etapas cambia en alto grado la manera de percibir y comprender la situación experimental por haber aprendido a diferenciar, abstraer y generalizar las propiedades esenciales y no esenciales de los instrumentos en el proceso de la acción directa, práctica, de los niños con los objetos. Únicamente como resultado de un largo análisis de los elementos del problema se efectúa de modo gradual el paso de la resolución del problema por medio de pruebas prácticas a su solución puramente visual, cognoscitiva.

* * *

(2) Como quiera que en la cuarta etapa los niños encuentran enseguida el instrumento necesario, surge la duda de si las etapas segunda y tercera, en las que sólo se dan instrumentos de formas negativas, son necesarias. ¿No le basta al examinando una sola prueba positiva para el análisis definitivo de los elementos esenciales?

Como comprobación, se llevaron a cabo tres experimentos complementarios que se diferenciaban de todos los anteriores por el hecho de que la primera etapa del problema se repetía dos y hasta tres veces consecutivas. Se vio que al presentar por segunda y hasta por tercera vez todos los instrumentos, los niños no encontraban enseguida el instrumento necesario y hacían varias pruebas erróneas.

En la II serie, los niños tenían que efectuar el *análisis de los instrumentos por su forma.* Se presentaban al examinando instrumentos de todas las formas, pero de un solo color (el blanco), es decir, los elementos esenciales del problema resaltaban por el hecho de excluir el elemento no esencial físicamente más fuerte (el color).

En la primera etapa, a los niños se les daba instrumentos de todas las formas, pero de un solo color.

De once examinandos que tomaron parte en esta serie de experimentos, dos niños (Seriozha K. y Mila U.), enseguida toman el instrumento con el gancho pequeño y alcanzan el caramelo. Los otros nueve niños llegan al resultado positivo después de dos o tres pruebas infructuosas (en vez de las ocho-diez de la primera etapa en la I serie).

Es interesante notar que los niños procuran elegir por turno instrumentos de las cuatro formas. Después de una prueba infructuosa con un instrumento de una forma, pasan al instrumento de otra forma, diciendo, a menudo: "Voy a probar, ahora, este palito".

Por lo común, en la primera prueba, los instrumentos se toman casualmente. Así, seis niños empiezan a actuar utilizando el gancho largo; otros tres, toman un palito, y dos, los ganchos pequeños. A veces también en la segunda prueba los instrumentos se toman sin seleccionarlos.

Nueve de los once niños resuelven el problema mediante pruebas prácticas. El proceso de análisis se lleva a cabo en el transcurso de la acción externa con el objeto. Los examinandos de la II serie, desde la segunda o tercera prueba distinguen el elemento esencial: la forma, que, en dicha serie, constituye la propiedad más señalada, pues los instrumentos tienen todos el mismo color. Sin embargo, aun observando enseguida la diferencia de formas, los niños no diferencian la forma por su aplicación. Para llegar a diferenciarla así, con vistas a la resolución del problema, el niño necesita hacer pruebas. Que el niño distingue enseguida los elementos esenciales (la forma en

general) y que luego, en las pruebas, aprende a diferenciar las formas según su aplicación, queda atestiguado por lo siguiente: 1) el reducido número de pruebas en comparación con la primera serie, y 2) el carácter que presenta la sustitución de un instrumento por otro (si no resultaba positivo el instrumento de una forma, el examinando lo diferenciaba y tomaba un instrumento de otra). El niño generalizaba como negativo el instrumento cuya forma resultaba inadecuada, y en la etapa dada ya no elegía ninguno de los instrumentos que tuviera la misma forma. Así, pues, ya en la primera etapa, el examinando que había efectuado varias pruebas, realizaba el análisis de las formas por su aplicación.

Ocupan un lugar especial dos examinandos, Mila U. y Seriozha K., que alcanzaron un resultado positivo ya en la primera prueba. Su proceder en las subsiguientes etapas pone de manifiesto que la elección de los instrumentos de la forma necesaria en la primera prueba fue casual, como ocurrió con los demás examinandos.

Saquemos algunas conclusiones:

1. Todos los niños resuelven el problema mediante la acción externa de tipo práctico, pero, a diferencia de lo que ocurre con los examinandos de la I serie, ya en las primeras pruebas distinguen el elemento esencial (la forma), delimitan las formas sin recurrir a las pruebas y llegan a diferenciarlas por su aplicación en el transcurso de la acción directa con los objetos. Por consiguiente, también en las condiciones de la II serie, es necesario llevar a cabo el análisis y la generalización de los elementos esenciales mediante actos de tipo práctico.

Hasta diferenciar las formas por su aplicación, con vistas a la resolución del problema, los examinandos, en las condiciones de esta serie, pasan sólo por un grado del análisis: el de los instrumentos por su forma.

2. La cantidad media de pruebas en la primera etapa es igual a tres (mientras que en la primera etapa de la I serie, cuando había que diferenciar no sólo la forma

sino, además, el color de los instrumentos, el número de pruebas fue dos veces mayor: de seis a siete).

En la segunda etapa sólo se da a los niños palitos rectos (de un mismo color, el blanco), con los que no es posible coger el lazo. De los once examinandos, tres se niegan enseguida a actuar (Shurik K., Valiesik B. y Galia K.); otros tres (Tania V., Aliosha N. y Marina K.) a la pregunta que se hace a todos (si pueden alcanzar el caramelo con aquellos palitos), responden que lo dudan, pero, a pesar de todo, lo intentan una o dos veces.

Los cinco examinandos restantes (entre ellos Mila U. y Seriozha K., quienes en la primera etapa tomaron enseguida ganchos pequeños) a la pregunta de si con aquellos palitos podían alcanzar el caramelo, respondieron positivamente.

Después de unas pruebas infructuosas, los niños piden palitos con ganchos, sin referirse al tamaño de estos últimos.

Los examinandos que resolvieron el problema en la segunda etapa de la II serie mediante pruebas prácticas pueden dividirse en dos grupos.

En las pruebas efectuadas por los niños del primer grupo no se descubre ni diferenciación ni generalización de instrumentos por sus formas. Pero se llega a diferenciarlos y generalizarlos definitivamente en la segunda etapa, por medio de la síntesis práctica. Para llegar a una diferenciación, incluso grosera, y a una generalización de formas, los niños han de realizar, por término medio, tres pruebas.

Del segundo grupo de examinandos que dudaron del éxito, sólo Tania V. llegó a diferenciar el palito como forma negativa en la primera etapa. Ello no obstante, la diferenciación de las formas positivas no resultó precisa, pues también en la segunda etapa la niña realizó una prueba.

Otros dos niños del segundo grupo (Aliosha N. y Marina K.) comienzan sólo en la segunda etapa las pruebas

con los palitos, después de decir que no podían alcanzar el caramelo con palitos rectos. Cabe pensar que estos niños, basándose en la experiencia anterior, correlacionaron de manera puramente visual el palito con el lazo (gancho doblado), pero sin estar seguros de su suposición, por lo que aun diciendo "no" comprueban prácticamente la suposición realizando cada uno de ellos dos pruebas.

De los once examinandos sólo tres resuelven el problema, pueden analizar los instrumentos con ayuda de la percepción, sin acción externa.

Resumamos algunas de las observaciones hechas acerca de los resultados a que llegaron los niños al resolver el problema en la segunda etapa de la II serie de experimentos.

1. A pesar de que todos los niños distinguen la forma positiva ya al final de la primera etapa, sólo algunos de ellos resuelven el problema en la segunda etapa de manera puramente visual, sin pruebas de tipo práctico; la mayor parte de los niños lo resuelven mediante procedimientos prácticos.

Sólo en la segunda etapa los examinandos llegan a diferenciar los palitos.

2. En las condiciones de la segunda serie, el proceso de generalización se lleva a cabo al mismo tiempo que el análisis.

3. La cantidad media de pruebas en la segunda etapa es igual a dos (en la segunda etapa de la I serie fueron, por término medio, cuatro pruebas).

En la tercera etapa a los niños se les dieron sólo ganchos largos y ganchos cerrados (lazos). Con ellos no es posible sacar el caramelo del recipiente, pero, por su forma, se aproximan más al gancho pequeño necesario que los palitos.

Tres niños, cuando el experimentador les ofreció los ganchos largos y cerrados, se negaron a utilizarlos, diciendo que hacían falta ganchos pequeños (Shurik K., Valie-

sik B. y Galia K.). Los demás examinandos, a la pregunta de si podrían alcanzar el caramelo, respondieron afirmativamente.

Al resolver el problema, los niños intentan utilizar los instrumentos de las dos formas que el experimentador les presenta: unos empiezan con el instrumento de gancho largo, pero en la segunda prueba toman el instrumento de gancho cerrado que, por su forma, es más parecido al gancho pequeño necesario. Al elegir el gancho cerrado, dicen: "Voy a probar con el gancho pequeño". Efectuadas una o dos pruebas, los niños se niegan a actuar y piden el otro gancho con que habían sacado felizmente el caramelo.

En la tercera etapa, comprobamos si se había hecho o no una diferenciación sutil de las formas y si se habían generalizado.

Siete niños resuelven el problema mediante pruebas de tipo práctico. De ello puede inferirse que en estos niños la diferenciación sutil alcanzada en la primera etapa, y la generalización de los instrumentos, no son firmes, y quedan destruidas cuando los instrumentos que se presenta a los niños son, únicamente, de forma negativa.

Se obtuvieron resultados especiales al realizar los experimentos con Galia K., niña que, ya en la primera etapa, siguió un camino distinto al de todos los demás niños para la diferenciación de las formas: unió las formas del gancho largo y cerrado, por una parte; y los palitos y los ganchos pequeños, por otra. Enseguida reacciona negativamente ante el primer grupo de instrumentos (ganchos largos y cerrados), y hasta en la primera etapa toma al revés el gancho largo. Sólo después que el experimentador la invita a que intente alcanzar el caramelo con el otro extremo, la niña da la vuelta al instrumento, cosa que hace de mala gana, y rápidamente lo deja a un lado a la vez que elige un palito recto. Por esto en la primera etapa no efectuó más que una prueba con el instrumento de gancho doblado, y no hizo ninguna en la tercera.

De los once niños, únicamente tres (Galia K., Shurik K. y Valiesik B.) resuelven el problema de modo puramente visual. Por lo visto, la diferenciación quedó en ellos firmemente consolidada en la primera etapa. A este grupo puede unirse Olia V., que efectuó una sola prueba en esta etapa. Shurik K., Valiesik B. y Olia V., no realizaron ninguna prueba en la segunda etapa. Estos niños ya en la primera etapa llegaron a la diferenciación precisa de los instrumentos y no la olvidan en las etapas subsiguientes. Sobre esta base llegan a una firme generalización, que se manifiesta brillantemente en las etapas segunda y tercera, pese a que los examinandos no realizaron más que una prueba.

Resulta, pues, que cuando las propiedades esenciales, necesarias para la resolución del problema, han sido diferenciadas y abstraídas antes, puede bastar una prueba para llegar rápida y firmemente a la diferenciación y generalización de los instrumentos.

Sinteticemos los resultados obtenidos en la tercera etapa de la resolución del problema.

1. Tres de los once niños resolvieron el problema de modo puramente visual; los demás, con ayuda de pruebas prácticas, pese a que muchos de ellos en la primera etapa habían efectuado pruebas con instrumentos de la forma dada; la diferenciación sutil resultó menos firme que la diferenciación basta.

2. La cantidad de pruebas, en la tercera etapa (dos por término medio) es igual a la cantidad de pruebas realizadas en la misma etapa de la I serie. Semejante hecho confirma una vez más la conclusión de que al llegar a la tercera etapa de la I serie, los examinandos habían efectuado ya la abstracción total del color y diferenciaban los instrumentos sólo por su forma.

3. En la tercera etapa los niños llegaron a diferenciar la segunda forma negativa (los ganchos grandes).

En la cuarta etapa, a los examinandos se les daban instrumentos de todas las formas. Diez entre once niños

toman enseguida el instrumento de forma positiva, es decir, el gancho pequeño. (Únicamente Seriozha K. deja de lado el gancho pequeño al realizar la cuarta prueba).

Las condiciones en que transcurrió la resolución del problema en la etapa primera y en la cuarta, eran análogas, pero las actuaciones de los niños presentan diferencias esenciales. La distinción entre los instrumentos por la forma, distinción a la que se llegó en las tres primeras etapas, y la generalización de los instrumentos de la misma forma permitieron que los niños en la cuarta etapa (algunos de ellos ya en la segunda y en la tercera) resolvieran el problema sin pruebas prácticas, de manera puramente visual. Tenemos, por tanto, que para la resolución propiamente cognoscitiva, puramente visual del problema, fue necesario llegar a formar y consolidar la diferenciación y la generalización en el transcurso del manejo directo de los objetos. que crea, de hecho, nuevas condiciones para el análisis.

Para comprobar la exactitud y la firmeza de la generalización de los instrumentos según la propiedad esencial se llevó a cabo un experimento de control. Consistió el experimento aludido en dar a los niños instrumentos de todas las formas y en invitarlos a que seleccionasen aquéllos con que era posible alcanzar el caramelo sin recurrir a las pruebas para efectuar la selección. Todos los niños, sin excepción, seleccionaron los instrumentos acertadamente. Está claro, por tanto, que la diferenciación y la generalización de los instrumentos de forma positiva se habían consolidado firmemente.

Sinteticemos los resultados de la II serie de experimentos y saquemos algunas conclusiones:

1. Como quiera que los elementos esenciales estaban ya delimitados en el propio material de experimentación, en la segunda serie de experimentos los niños pasaron mucho más rápidamente que en la primera serie de la resolución del problema con ayuda de pruebas prácticas a la solución puramente cognoscitiva, visual. Las condiciones dadas en la II serie excluían el análisis de los instru-

mentos por el color (y también el análisis de los instrumentos por el color y la forma). Dicho con otras palabras, quedaba excluido un eslabón del proceso cognoscitivo: la abstracción del elemento esencial respecto al elemento no esencial, pero físicamente más fuerte; ello facilitaba las condiciones del análisis y de la generalización. Y, en efecto, en este caso, los niños realizaron por término medio siete pruebas en vez de las doce - trece de la I serie. El hecho de que también, dadas las condiciones de la II serie, los niños hagan pruebas, confirma una vez más que el carácter de la resolución del problema —su resolución con ayuda de pruebas prácticas o por un procedimiento puramente cognoscitivo— depende del desarrollo de la percepción.

2. En la serie dada de experimentos, el proceso de generalización tuvo lugar al mismo tiempo que el análisis, ya que para la generalización, los examinandos no realizaron pruebas complementarias.

3. El análisis del elemento esencial (forma) se hizo en el sentido de delimitar la propiedad esencial (el gancho pequeño) mediante la diferenciación de todas las formas dadas no esenciales (de los palitos y ganchos largos).

* * *

En la III serie, los niños debían efectuar el *análisis de los instrumentos por la forma, de la que el color era señal.* A los niños se les presentaron instrumentos de diversa forma y de distinto color; pero, a diferencia de la primera serie, el color vivo, en esta ocasión, era señal ora de elementos esenciales ora de elementos no esenciales. En esta serie de experimentos, también se establecieron cuatro etapas, pero se partió de un principio distinto en comparación con el de las dos series precedentes.

En la III serie de experimentos, lo mismo que en las dos primeras, se colocaba ante el examinando un recipiente de cristal que tenía en el fondo un caramelo con su lazo

En la primera etapa de los experimentos, se invitaba al examinando a sacar el caramelo por el lazo sin inclinar el recipiente. Para resolver el problema se daban al niño instrumentos de distintas formas: tres palitos blancos, tres ganchos largos blancos, tres ganchos pequeños blancos, un gancho blanco cerrado y cuatro ganchos pequeños con un extremo pintado de vivo color. Cuando el examinando había sacado el caramelo, comenzaba la *segunda etapa.* Se cambiaban los instrumentos y el niño recibía, entonces, tres palitos blancos, tres ganchos largos blancos, tres ganchos pequeños blancos, un gancho cerrado blanco, dos ganchos largos con el extremo pintado de color vivo y un gancho cerrado con el extremo pintado también de color vivo.

En la tercera etapa, que se iniciaba después de haberse acertado por segunda vez con la forma positiva, se daban a los niños todos los instrumentos utilizados en las dos etapas primeras. La tarea de los examinandos consistía en seleccionar los instrumentos con que se podía alcanzar el caramelo. Si los niños seleccionaban los instrumentos con acierto, se daba por terminado el experimento. En caso contrario, se introducía una *cuarta etapa,* y a los niños se les daba un instrumento incluido por ellos equivocadamente en los de formas positivas. A continuación se les invitaba otra vez a realizar la selección.

Examinemos los resultados de la III serie de experimentos.

En la primera etapa, a los examinandos se les daban instrumentos de todas las formas, con la particularidad de que los extremos de los instrumentos de forma positiva se distinguían por el color.

De ocho niños que participaron en los experimentos de esta serie, cuatro tomaron enseguida el instrumento necesario y alcanzan el caramelo (Andriéi R., Natasha P., Kolia F. y Nina D.). Otros dos examinandos (Seriozha U. y Aliosha Z.) eligieron al principio un instrumento de color blanco; al ver que el resultado era negativo, tomaron

el instrumento con el extremo pintado de color vivo. Tres de los examinandos (Aliosha Z., Misha A. y Nina P.) realizaron gran número de pruebas en la primera etapa (correspondientemente: ocho, trece y doce) debido a la falta de habilidad en los movimientos. Así, Misha A. ya en la primera prueba tomó el instrumento con gancho pequeño, pero únicamente logró sacar el caramelo, con gran trabajo, en la prueba décimotercera.

Que el número de pruebas registrado en la primera etapa fuera pequeño se explica por el hecho de que el color, que los niños diferencian al principio, está unido, en las condiciones dadas, a la forma positiva. Ello contribuye a que pronto se encuentre el instrumento que posee la propiedad esencial (el gancho pequeño) para resolver el problema. Aunque la resolución del problema depende directamente de que se elija la forma correcta, como quiera que el color sirve de señal para la forma, el niño puede guiarse por el color. De este modo puede elegir la forma adecuada sin distinguir ni analizar las formas.

La cantidad media de pruebas en la primera etapa es igual a dos, o sea, es tres veces menor que en la primera etapa de la I serie, donde el análisis de los elementos del problema se efectuaba en condiciones más complejas, dado que el color no señalaba la propiedad esencial del instrumento.

En la segunda etapa, al examinando se le daba instrumentos de todas las formas, con la particularidad de que se distinguían con un color vivo los extremos de instrumentos de forma negativa, de modo que se creaban relaciones contradictorias ente el color y la forma positiva.

En la segunda etapa, el número de pruebas es sensiblemente mayor que en la primera. Sólo uno de los examinandos, Seriozha U., elige el instrumento enseguida. Aliosha Z. coge el gancho pequeño en la segunda prueba, mas, por lo visto, casualmente, dado que al mismo tiempo dice que el caramelo se puede sacar con cualquier gancho. Todos los demás examinandos (seis niños) intentan

elegir el instrumento de una vez en consonancia con los dos caracteres ya consolidados. Eligen el instrumento necesario después de dos o tres pruebas. (El mayor número de pruebas corresponde a Misha A., pero ello se debe, otra vez, a su poca habilidad de movimientos. Ya en la tercera prueba toma el gancho pequeño; sin embargo no logra hacerse con el caramelo hasta la sexta prueba). Es de notar que de los ocho examinandos sólo Aliosha Z. toma un palito.

Tenemos, pues, que de los ocho niños, siete resuelven el problema con ayuda de pruebas prácticas. (La diferenciación de los instrumentos por la forma se mantiene sólo en un examinando, Seriozha U., quien resuelve el problema de modo puramente visual).

En la segunda etapa, el número de pruebas hechas por seis niños excede al de la etapa primera, a pesar de que en ellos la propiedad esencial había sido ya consolidada positivamente una vez. Estos examinandos eligen los instrumentos según dos caracteres, pero como quiera que en las condiciones de la segunda etapa esos dos caracteres no coinciden, en los examinandos surgen contradicciones entre el color y la forma, es decir, entre la propiedad esencial y la que no lo es. Al principio "triunfa" la propiedad físicamente más señalada, si bien no esencial para la resolución del problema: el color.

Únicamente al ver que el color como propiedad no esencial no queda consolidado, los niños eligen el instrumento orientándose sólo por la forma.

Tenemos pues que, en la segunda etapa, lo mismo que en la primera, los examinandos resuelven el problema aún con ayuda de pruebas prácticas. La cantidad media de las pruebas se eleva hasta cuatro, pues las relaciones contradictorias entre el color y la forma positiva originan dificultades complementarias para el análisis de los instrumentos.

En la tercera etapa, se dieron a los examinandos todos los instrumentos (con la particularidad de que parte

de ellos, tanto de forma positiva como de forma negativa, se distinguían por el color), y se les invitaba a seleccionar aquellos con que fuera posible sacar el caramelo.

De los ocho niños, cinco, a la invitación del experimentador para que eligieran los instrumentos de forma positiva, juntaron con los de forma positiva (con ganchos pequeños) instrumentos de forma negativa (con gancho largo). Habían aprendido ya a diferenciar la forma positiva, pero aún no se había consolidado en ellos la diferenciación de instrumentos de forma negativa (con ganchos largos).

En la cuarta etapa, los examinandos recibían todos los instrumentos que habían elegido, y se les ofrecía para la prueba un instrumento con un gancho largo. Cuando los niños habían efectuado la primera prueba con dicho instrumento, se les invitaba por segunda vez a realizar la selección.

Absolutamente todos los niños resolvieron el problema en la cuarta etapa sólo recurriendo a la percepción. Por consiguiente, para llegar de manera definitiva a la diferenciación, cuyo proceso se inicia ya en la segunda etapa, les bastó, a los examinandos, una sola prueba.

Ahora podemos sacar algunas conclusiones respecto a la III serie de experimentos.

1. Como quiera que en la III serie, lo mismo que en la serie II, delimitamos el elemento esencial, los examinandos efectuaron bastante más rápidamente el paso de la resolución del problema mediante pruebas de tipo práctico a su resolución puramente cognoscitiva, sin pruebas consistentes en el manejo de los instrumentos.

En la III serie, quedó excluido un grado del análisis, a saber, el análisis de los instrumentos tan sólo por la propiedad no esencial físicamente más señalada (el color). Esto aceleró el proceso de abstracción de la propiedad no esencial, el proceso en virtud del cual se elabora la diferenciación y la generalización de la propiedad esencial (el gancho pequeño). El número de pruebas en la III serie,

lo mismo que en la segunda, es menor que en la I (por término medio siete pruebas en vez de doce - trece). El hecho de que, en las condiciones de la III serie, los examinandos, a pesar de todo, efectuaron siete pruebas, confirma nuevamente la necesidad de que se elabore el análisis y la generalización para pasar a la resolución puramente visual del problema.

2. En la III serie, el pequeño número de pruebas no sólo se explica por el hecho de haberse excluido un eslabón del análisis. En esta serie, en cada nueva etapa, a los examinandos se les daba instrumentos de forma tanto negativa como positiva. De ahí que los examinandos aprendieran enseguida a diferenciar los elementos esenciales sin haber diferenciado previamente todas las formas negativas (palitos y ganchos largos).

* * *

Vemos, por tanto, que en las tres series los niños pasaron de la resolución del problema mediante pruebas de tipo práctico, a la resolución puramente visual, sin pruebas consistentes en el manejo de los instrumentos. Al final de las etapas segunda y tercera, los niños, interrumpiendo las pruebas, declaran por sí mismos que "con palitos" no se alcanzan los caramelos, que se necesitan "ganchos", o bien "con esto (gancho largo) no se puede sacar, lo saqué con el gancho pequeño". Sin embargo, al comienzo de las etapas segunda y tercera, esos mismos niños, a la pregunta del experimentador de si podrían alcanzar el caramelo con los instrumentos que se les ofrecen (palitos o ganchos largos), respondieron afirmativamente.

La rapidez con que se pasa (en cantidad de pruebas) de la resolución del problema mediante pruebas prácticas a su resolución puramente visual, se caracteriza por medio de los datos siguientes. En la primera etapa de la I serie, cada examinando hizo por término medio de seis a

siete pruebas; de la II serie, tres pruebas; de la III serie, dos pruebas. En la segunda etapa de la I serie, cuatro pruebas; de la II serie, dos pruebas; de la III serie, cuatro pruebas. En la tercera etapa de la I serie, dos pruebas; de la II serie, dos pruebas; de la III serie, cero pruebas. Por término medio, en todas las etapas de la I serie, se hicieron de doce a trece pruebas; en las de cada una de las series II y III, siete pruebas.

En la II serie, a diferencia de la I, el carácter no esencial, el color, se nivela; de este modo, se delimita la forma del instrumento como carácter esencial para la resolución del problema. Con ello se elimina uno de los dos eslabones fundamentales del análisis del intrincado complejo "color y forma". En este caso, el niño no ha de analizar los objetos según el carácter del color. Por este motivo, el número medio de pruebas (en comparación con la I serie) disminuye casi en dos veces, o sea, el paso de las pruebas prácticas a la resolución puramente visual del problema, se acelera sensiblemente.

En la III serie, se excluye otro de los dos eslabones del análisis, el análisis de la forma, dado que el color vivo es señal de la forma necesaria. De ahí que (como en la II serie), la cantidad general de pruebas disminuye también (en comparación con la I serie, donde el análisis transcurrió en las condiciones más difíciles) casi en dos veces, y el paso a la resolución puramente visual del problema se hace más rápidamente. Tan sólo en la segunda etapa de la III serie, este paso se hace un poco más lento porque el color se convierte en señal de las formas inadecuadas.

Como demuestra la investigación experimental de este proceso en la ontogénesis, la condición interna de la separación de la actividad cognoscitiva respecto a la actividad práctica radica en el proceso en virtud del que se forma la generalización. Este proceso, a su vez, se va formando como resultado del análisis que delimita las propiedades esenciales de los objetos, el conocimiento de las

cuales permite resolver los problemas (tareas) que se plantean al hombre. Mientras el niño, por medio del análisis, no distinga las propiedades esenciales del problema y no efectúe la correspondiente generalización, mientras se vea obligado a operar con *esta* cosa única y no con el "instrumento" de determinada forma, no tiene más remedio que ensayar cada nueva cosa que se le presente. Pero cuando, como resultado del análisis, los instrumentos se presentan en forma generalizada y se ha aclarado, asimismo por medio de la generalización, que es apropiado el instrumento de tal o cual forma y no lo es otro, resulta totalmente innecesario ensayar cada nuevo objeto presentado, y el niño interrumpe las pruebas de tipo práctico.

A. V. BRUSHLINSKI

EL PAPEL DEL ANALISIS Y LA ABSTRACCION EN EL CONOCIMIENTO DE LAS RELACIONES CUANTITATIVAS

El conocimiento de las relaciones cuantitativas constituye un momento importante en la cognición del mundo objetivo. Como indicó Marx, "la primera actividad teórica de la razón, que oscila aún entre la sensibilidad y el pensamiento, es el cómputo. El cómputo es el primer acto teórico libre de la razón del *niño*"(1). El estudio de las etapas iniciales del conocimiento de las relaciones cuantitativas así como de la formación del concepto de número, estudio efectuado con materiales relativos a la "historia del desarrollo mental del niño" (Lenin), ofrece la posibilidad de descubrir, también, algunas leyes generales de la actividad cognoscitiva.

El problema del número en sus aspectos psicológico y gnoseológico es de esencial importancia para la filosofía (en particular para las bases filosóficas de la matemática).

La investigación psicológica sobre la formación del número prueba que este concepto se elabora en el niño únicamente como resultado de un complejo proceso cognoscitivo que descubre relaciones cuantitativas y numéricas esenciales.

El presente trabajo constituye una tentativa para estudiar el proceso en virtud del cual el niño entra en conocimiento de las relaciones cuantitativas, y también para investigar cómo llega a formar algunas operaciones de cálculo sobre la base del proceso indicado. No es posible

(1) *C. Marx* y *F. Engels*, "Obras", t. 1, 2ª ed., pág. 31 y sig.

contar los objetos ni, en general, operar con ellos como objetos de cálculo, sin comprender aunque sólo sea las relaciones cuantitativas más simples existentes entre ellos. El conocimiento de tales relaciones, condición esencial para que los niños puedan conocer las operaciones aritméticas, se caracteriza precisamente, de manera objetiva, por el dominio que éstos posean de dichas operaciones.

Para investigar algunos eslabones del proceso de cognición de las relaciones cuantitativas, elegimos un caso particular, pero muy significativo, de la formación de las operaciones aritméticas simples en los niños de cinco a ocho años de edad; se trata de la adición por unidades (del segundo sumando al primero, tomado como un todo único) y también del cómputo resultativo (véase más adelante). Considerando el proceso del pensar como análisis, síntesis, abstracción y generalización, partimos del supuesto de que ambas operaciones aritméticas se forman como resultado de un proceso de análisis, síntesis, abstracción y generalización de relaciones cuantitativas por parte del niño[2]. En el presente artículo exponemos brevemente algunos resultados iniciales de la comprobación experimental de dicha hipótesis.

Respecto al problema de cómo se forman en el niño las operaciones aritméticas, existen muchas investigaciones, fecundas e interesantes (como las de F. N. Blejer, G. S. Kostiuk, A. M. Leushin, N. A. Menchínskaia, J. Piaget, E. Thorndike, I. A. Frenkel, entre otras). En el presente trabajo utilizamos parcialmente sus resultados. En las investigaciones aludidas, sin embargo, no se establece como objetivo especial el de estudiar psicológicamente el proceso de la cognición, el proceso de análisis, síntesis, abstracción y generalización de relaciones cuantitativas,

(2) En calidad de objeto especial de estudio hemos puesto de relieve aquí —tal como es necesario hacer en cualquier investigación— ante todo los procesos de análisis y de abstracción; pero, de uno u otro modo, hemos tenido en cuenta, además, como es natural, los procesos de síntesis y generalización.

proceso que conduce a que el niño pueda efectuar las operaciones de cálculo.

Para el estudio de este proceso cognoscitivo en los niños, hemos partido, en primer lugar, de un hecho de dominio común, a saber, que el niño, al principio, efectúa las operaciones aritméticas, hasta las más simples, sólo valiéndose de objetos, de cosas materiales. Todavía no está en condiciones de prescindir de las cualidades sensoriales de lo contable y no puede abstraer las relaciones propiamente cuantitativas para resolver las operaciones de cálculo sólo en la "mente", como operaciones mentales. Dicho con otras palabras: el niño no conoce aún el concepto de número, y para él lo contable aparece únicamente como conjunto o multiplicidad de objetos sensorialmente dados. En estas condiciones, los niños efectúan la suma aritmética de la manera más primitiva, por el *cómputo* desde la unidad y por unidades (comenzado por el primer sumando). Verbigracia, al añadir a 5 objetos otros 3, el niño vuelve a contarlos todos por orden ("1, 2, 3, 4, 5 - 6, 7, 8"), pese a que por el cómputo que acaba de hacer con cada grupo por separado ya "sabe" bien cuántos objetos hay en cada uno de los sumandos.

La situación cambia radicalmente cuando en los niños se ha formado ya el concepto inicial de número. En este caso, los niños empiezan gradualmente a resolver las operaciones de cálculo "en la mente", como operaciones mentales muy simples. En estas condiciones, el niño, como es sabido, efectúa la suma por un procedimiento más difícil, aunque también más eficiente, por medio de la *adición* por unidades (del segundo sumando al primero, tomado como un todo único). Por ejemplo, para añadir a 5 objetos otros 3, los niños empiezan enseguida a añadir el segundo sumando al primero sin repetir el cómputo de este último: "5 - 6, 7, 8". En este caso, los niños operan tomando el sumando de partida como un número, como un concepto elemental. Por su contenido objetivo, la adición implica dicho concepto en calidad de premisa necesaria. Si

tal concepto no se ha formado aún en el niño, éste no puede efectuar la operación de adicionar (y realiza la suma únicamente por medio del cómputo). De ahí que su ejecución pueda servir de criterio objetivo para comprobar si se ha formado o no en el niño el concepto inicial de número.

Tenemos, pues, que la adición no puede darse mientras las relaciones cuantitativas no hayan sido delimitadas, analizadas y generalizadas en el nivel de abstracción conceptual, y no aparecen para el niño como concepto elemental. Es dicho proceso cognoscitivo, a base del cual los niños pasan del cómputo a la adición, lo que constituye el objeto de la investigación presente.

Al principio, las relaciones cuantitativas existen para los niños sólo dentro de un conjunto de objetos. Por esto el que un conjunto de objetos presente tal o cual característica sensible para el niño (es decir, el modo como lo contable se presenta a su percepción) puede tener un significado sumamente esencial para la delimitación y el análisis de tales relaciones. Las "raíces" del concepto de número "se encuentran en la sensibilidad", aquél tiene sus "bases sensibles" (Séchenov). Por ejemplo, cuando los niños examinan y cuentan un grupo formado por cinco objetos de distintos colores (dos rojos y tres verdes), resulta para ellos singularmente fácil separar en el interior del conjunto algunas relaciones cuantitativas elementales: cinco objetos son dos objetos y tres objetos juntos. Sobre este hecho basamos la metodología experimental utilizada en la presente investigación.

La metodología de los experimentos consistía en lo siguiente: Cambiando con vistas a un determinado fin conjuntos de objetos presentados al examinando, sobre la base del color, de la disposición espacial y de la cantidad, utilizando objetos contables iguales y diversos, etc., reprodujimos en el experimento condiciones especialmente favorables para el proceso de análisis, síntesis, etc., de las relaciones cuantitativas.

En el decurso del experimento, el niño debía responder a varias preguntas: "¿cuántos objetos hay aquí?", "¿cuántos objetos hay en total, en estos dos montones?", "¿por qué crees que aquí hay tantos objetos?" y otras. Se originaba una conversación durante la cual los niños examinaban con singular atención los conjuntos y procuraban también, aunque fuera de manera muy elemental, fundamentar su determinación de la cantidad de objetos.

El principal criterio *objetivo* para juzgar acertadamente de cómo transcurre el proceso de análisis de las relaciones cuantitativas (y numéricas) nos es dado por los productos de dicho proceso, en primer lugar por la ejecución de las operaciones de cálculo. Las operaciones que el niño domina y el modo de ejecutarlas son el indicador del proceso del pensar. Pueden ser, además, indicadores esenciales de dicho proceso otras acciones del sujeto, como la manera de examinar el conjunto, la manera de disponerlo (más o menos simétricamente, en una línea, etc.), de dividirlo en partes y de unirlo otra vez, la manera de comprobar y "fundamentar" el resultado de sus operaciones, los movimientos (con los dedos, y otros) que efectúa al contar, etc. Tiene asimismo su significado lo que el niño dice durante el experimento. Todo eso se anotó cuidadosamente. En los experimentos, los niños podían manifestar toda su iniciativa y perspicacia. La metodología del experimento no los limitaba de manera innecesaria con procedimientos de resolución rigurosamente impuestos.

Con el fin de observar de manera más completa el proceso en virtud del cual se entra en conocimiento de las relaciones cuantitativas, se estudió no sólo el análisis, la síntesis, etc., de la composición del conjunto, de la multiplicidad y del número, sino, además, el análisis inicial —que precede a dicho conocimiento— de las relaciones cuantitativas elementales, gracias al cual llega el niño al cómputo resultativo. La operación que lleva este nombre estriba en la aptitud para referir el último de los nume-

rales nombrados al contar, a todo el conjunto contado (y no a su último objeto, como al principio hacen algunos niños) [8].

Se realizaron en total cinco series de experimentos. En dos series previas se comprobó cuáles eran los conocimientos y hábitos iniciales de los examinandos en el terreno del cálculo. Las series fundamentales fueron tres. En la I serie de experimentos, se estudió el análisis inicial de las relaciones cuantitativas elementales a partir del cual el niño llega a dominar el cómputo resultativo. En la II serie, el objeto de la investigación consistió en el proceso de análisis de relaciones cuantitativas (y numéricas) bastante complejas, gracias al cual puede realizar el niño operaciones de adición. En la III serie (de control) se intentó enseñar al niño la adición antes de que hubiera efectuado el análisis de las relaciones cuantitativas (y numerales). Participaron en la I serie de experimentos niños que aún no conocían el cómputo resultativo. Los examinandos de las demás series efectuaban dicha operación sin equivocarse.

Se realizaron en total más de 350 experimentos con 49 examinandos (párvulos de 6 jardines de infantes y alumnos de las primeras clases de dos escuelas). La duración de un experimento era de 15 a 30 minutos. Al estudiar los datos obtenidos, se tomaba en consideración

---

(3) De este modo, al dominar el cómputo resultativo, el niño comienza a designar acertadamente el conjunto con la palabra numeral, es decir, empieza a comprender su significado. De ahí que únicamente después de que ha aprendido a realizar dicha operación, el niño está en condiciones de asimilar las demás operaciones aritméticas —más complicadas—, en particular la de adicionar.

En el presente trabajo, hemos estudiado el cómputo resultativo en sus rasgos más generales y sólo en la medida en que crea las condiciones que permiten a los niños aprender la adición. Nuestro objetivo fundamental consistía en ver de qué modo los niños llegaban a dominar esta segunda operación.

ante todo a los niños cuyo proceso de análisis de las relaciones cuantitativas resultaba más desarrollado y, por ende, accesible con relativa facilidad a la investigación.

* * *

La formación del cómputo resultativo se estudió en la I serie de experimentos con 15 niños de 5 a 8 años de edad. Se realizaron en total 45 experimentos. Luego, una parte de los niños participó en los experimentos de la II serie; otra parte, en los de la III serie.

Primero se comprobó que ninguno de los niños sabía utilizar el cómputo resultativo al tener que ejecutar la tarea que se les indicaba: "muestra cuántos objetos hay aquí" ("discos" de forma igual y otros objetos de cálculo sumamente distintos). Referían el último de los numerales citados al contar, solamente al último objeto contado (aunque sabían componer el conjunto correspondiente al numeral dado al cumplir la tarea de "pon tantos objetos").

He aquí un ejemplo típico (Liusia J. — 5; 8, es decir: 5 años y 8 meses).

Experimentador: ¿Cuántos discos hay aquí?

Sujeto: 1-13(4).

Exp.: Muéstrame 13 discos.

Suj.: Éste, el rojo con manchitas blancas (señala el *último*, es decir, de hecho, el décimo tercero).

Exp.: Pues muestra 12 discos.

Suj.: Ése (el *penúltimo*).

Del mismo modo procedieron algunos niños (tres) al efectuar la suma aritmética, por ejemplo, Galia O. (6; 0). Al añadir a 4 objetos 5, Galia O. unió al primer sumando tan sólo el último "disco" (el quinto).

Citemos un ejemplo:

(4) Mediante esta abreviatura se designa el cómputo de todos los objetos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Exp.: Añade a cuatro discos estos cinco[5]; ¿cuántos se obtendrán, en total? (en la mesa había 4 y 5 objetos).

Suj.: Aquí hay 5 (señala el *último* disco, es decir, el quinto del segundo sumando); no, al 4 hay que añadir 5... (añade al primer sumando sólo el *quinto* objeto).

Exp.: (Después de una pausa). ¿Has añadido todos los discos?

Suj.: Sí.

Exp.: Así, pues, ¿cuántos discos resultan en total?

Suj.: 5.

Exp.: Muestra 5 discos.

Suj.: (Señala el *quinto*).

Exp.: ¿Cuántos discos has añadido?

Suj.: 5... a los 4 he añadido 5.

Exp.: Muestra 4 discos.

Suj.: Mire (señala el *cuarto* objeto del primer sumando, al que ahora está unido el quinto objeto del segundo sumando).

Exp.: ¿Y dónde hay 5 discos?

Suj.: (Señala el siguiente, el *quinto*) sin éste (sin el quinto) había 4, pero ahora hay 5.

Exp.: ¿Y por qué no has añadido estos discos? (señala los 4 objetos restantes del segundo sumando).

Suj.: Éstos son 4... ahora los añado (une a ellos el quinto objeto); ahora aquí hay otra vez 4 (señala el cuarto) y 5 (señala el quinto).

Resulta, pues, que para algunos niños casi cualquiera de los numerales que les son accesibles existe primero, ante todo, como segunda denominación del objeto. Algunos examinandos dicen: "este disco se llama cinco". Para ellos, el objeto dado se presenta como con una doble denominación: "disco" y "cinco", de lo que son testimonio sus operaciones aritméticas. Se encuentran asimismo, por ejemplo, tales formulaciones de los niños: "un disco es cinco", es decir, un objeto se "equipara" directamente al cinco.

Estos hechos pueden servir para demostrar que en determinadas circunstancias, los numerales carecen aún

---

(5) Generalmente, el examinando contaba cada uno de los sumandos antes de efectuar la suma. Lo mismo sucedió en las subsiguientes series de experimentos.

casi por completo de contenido propiamente matemático para el niño.

Para que esta demostración sea más convincente, es necesario analizar las condiciones en que se han obtenido los hechos referidos. Ante todo se plantea una cuestión: ¿no ha sido la propia formulación del problema ("muestra tantos objetos") la que ha provocado, en cierto modo, la equivocada resolución del niño (aunque la posibilidad de semejante incitación resultaría muy significativa para caracterizar el proceso del conocimiento)? Con el fin de comprobar esta conjetura efectuamos experimentos complementarios con otros examinandos. A estos niños se les presentaron los mismos problemas pero formulados de maneras distintas, verbigracia: "¿dónde hay 5 discos?", "muestra dónde hay 5 discos", "muestra 5", "¿dónde están estos discos?", "¿dónde están?", "muestra estos discos", "muéstralos", "muestra dónde están", etc.

Los experimentos llevados a cabo, si bien han de ser aún continuados, demuestran que la formulación que más influye en la respuesta es la del tipo "¿dónde hay 5?"(6)(*). Al resolver el problema, en este caso, muchos niños señalan únicamente un disco. Por otra parte, la formulación más acertada fue la del tipo "muestra 5 discos". Ésta fue la que habitualmente utilizamos en la I serie de experimentos.

Resulta, pues, que para muchos niños las palabras numerales, al principio, carecen casi por completo de contenido propiamente aritmético. En varios casos, los examinandos operan erróneamente con los objetos de cálculo (sobre todo al sumar, cuando, en lugar de cinco objetos, añaden al primer sumando tan sólo uno), es decir, no delimitan ni diferencian las relaciones cuantitativas entre

(6) Cabe suponer que tiene el mismo significado negativo la disposición en línea de los objetos de cálculo.

(*) La redacción rusa de esta pregunta ("gdié 5?") es un tanto anfibológica: puede traducirse "¿dónde hay cinco" o "¿dónde está el cinco?" (N. de la R.).

los objetos (por ejemplo, en vez de señalar seis objetos señalan uno solo). Ello atestigua que aún no han analizado las relaciones cuantitativas elementales.

El análisis de las relaciones cuantitativas se realiza sobre la base de la palabra. Si el niño no comprende las palabras numerales, ello demuestra que dicho análisis aún no se ha efectuado. El proceso de análisis de las relaciones cuantitativas constituye, al mismo tiempo, un proceso de formación de los significados de dichas palabras, por cuanto los objetos que se han de contar se designan mediante numerales. En tales significados se fijan los productos del análisis de referencia. El criterio objetivo para juzgar de este proceso cognoscitivo estriba en la comprensión de los numerales por parte del niño y ello se pone de manifiesto en la ejecución de las operaciones de cálculo.

Al resolver el problema de "pon aquí tantos objetos", los examinandos formaban sin equivocarse un grupo de objetos de la cantidad dada, es decir, dominaban ya el cálculo elemental. En esta situación, por tanto, estaban en condiciones de comprender el significado más simple del numeral. Los objetos contados comenzaban a aparecer, para los niños, no como simple grupo, sino como un conjunto (con una determinada característica cuantitativa). Los niños diferenciaban con toda precisión los conjuntos de distinta cantidad. Todo esto constituye una importante etapa en el desarrollo del análisis de las relaciones cuantitativas; mas semejante análisis no se encuentra aún suficientemente adelantado para asegurar el paso del cálculo elemental al resultativo.

Constituye un eslabón (una etapa) fundamental de este proceso cognoscitivo el análisis del significado de los numerales, análisis que, en nuestros experimentos, se produjo como base para la formación del cómputo resultativo y se convirtió, por ende, en el objeto principal de la investigación. Este eslabón del análisis se estudió en las condiciones de una situación contradictoria, experimentalmente creada. Por ejemplo, al cumplir la tarea que se le señala con las palabras "muestra 5 discos", el niño denomina sólo

un objeto, el último. El experimentador, procurando que el niño se fije en esta contradicción, dice: "éste es *uno*, muestra *cinco* discos".

Veamos el ejemplo del examinando Seriozha K. (6; 2).
Exp.: ¿Cuántos discos hay aquí?
Suj.: 1-5.
Exp.: Muestra 5 discos.
Suj.: Mire (señala el *quinto*).
Exp.: ¡Esto es uno!
Suj.: ¿5 discos? Aquí están, *todos* estos discos son 5.
Exp.: ¿Y cuántos hay aquí? (Presenta el segundo grupo de objetos).
Suj.: 3.
Exp.: ¿Dónde hay 3?
Suj.: Mire (señala con un gesto *todos* los 3 discos).
Exp.: Pues muestra 5 discos (es decir, el primer grupo de objetos).
Suj.: Mire, 5 (señala el quinto); *un* disco es *cinco*, porque éste es 4 (señala el cuarto) y éste es 5 (señala el quinto).
Exp.: Éste es uno.
Suj.: A 4 se añade uno y serán 5.
Exp.: ¿Pero, dónde hay 5?
Suj.: Mire, *todos* estos discos, son el grupo de cinco (señala los 5 objetos).

En el transcurso del experimento, nuestro pequeño pensador comienza a comparar el "grupo de cinco" con la "unidad", con la particularidad de que los correlaciona directamente con el conjunto que acaba de contar, es decir, distinguiendo en el interior del conjunto ciertas relaciones cuantitativas, ante todo entre 1 objeto y 5 objetos. Pronto observa que el último de los objetos contados recibe en él dos denominaciones: "uno" y "cinco". Al analizar los dos nombres correlacionándolos con el objeto, el niño llega a comprender que son incompatibles "nombres" tan diferentes de un mismo objeto. Entonces, con el segundo de dichos numerales, el niño denomina a todo el conjunto contado, es decir, empieza a comprender el resultado del cómputo y ciertas interrelaciones cuantitativas entre los objetos del conjunto.

En líneas generales, el esquema de este análisis sensorial es, aproximadamente, como sigue: el "grupo de cinco" se refiere a un solo objeto, la "unidad" se analiza en función del mismo objeto y ambos numerales se comparan entre sí; luego, la correlación de "cinco" con todos los objetos contables permite comprender el verdadero significado de esta palabra (y resolver el problema planteado). Ahora ya no es el "nombre" de un objeto de cómputo, sino más bien el "nombre de un conjunto" (Thorndike). Al comprender el significado del numeral, el examinando, con ello, analiza relaciones cuantitativas, y viceversa: al analizarlas, comprende mejor los numerales.

Sobre la base de este proceso cognoscitivo el niño, por lo común, sólo gradualmente va dominando el cómputo resultativo. Muchos niños, después de haber resuelto un problema de cómputo (y después de haber comprendido el significado más sencillo de un numeral), no "transfieren" enseguida esta resolución a una situación distinta (a otros numerales). Por ejemplo, al principio del experimento, Seriozha K. comprende acertadamente lo que significa la palabra "tres", pero aún opera erróneamente con el conjunto "cinco". Tan sólo la correlación sistemática y directa de varios numerales con los objetos por ellos designados permite a los niños generalizar con acierto tales resoluciones y, sobre su base, comprender los significados de los demás numerales.

Resulta, pues, que todos los examinandos, apoyándose en el análisis de las relaciones cuantitativas más simples, llegaron a dominar el cómputo resultativo.

* * *

La formación de la operación aditiva, sobre la base del análisis que los niños efectúan de las relaciones cuantitativas, se estudió en la segunda serie (la principal) de experimentos, en los que participaron 21 niños de 6 a 8 años de edad (3 de los examinandos eran alumnos de las

primeras clases; los demás, de jardines de infantes). Estos niños, al principio realizaban la suma aritmética sólo por medio del cómputo. Para evitar que por este medio pudieran efectuar la operación aditiva se tomaron especiales medidas: el experimentador presentaba a los niños (como términos de comparación) varios problemas de sumar, prohibía el cómputo, etc.). En total se llevaron a cabo unos 200 experimentos.

Primero se mostraba a los examinandos conjuntos homogéneos (de discos de un mismo color y sin agruparlos, espacialmente, en partes). Al operar con ellos (examinándolos, contándolos, etc.), los niños, en la mayor parte de los casos, tampoco los dividían en grupos. Sencillamente, contaban los objetos sin distinguir en el interior de lo contado partes especiales.

He aquí un ejemplo (examinando: Tolia A. - 6; 2).
Exp.: ¿Cuántos discos hay aquí?
Suj.: (Examina los objetos), 3.
Exp.: ¿Por qué 3? ¿Cómo están?
Suj.: Aquí hay 3... como tienen que estar... es muy fácil contarlos, el 3 lo conocen todos.
Exp.: ¿Y cuántos hay aquí? (6 objetos rojos).
Suj.: (Los mira largo rato), 7.
Exp.: ¿Por qué, 7?
Suj.: (*De nuevo* mira el conjunto de objetos y él mismo se da cuenta de su error), me he equivocado, hay 6.

El material de cómputo se presentaba a la percepción del niño como unidad sensorialmente homogénea, indiferenciada. Así lo confirma un hecho que, según nuestros y otros[7] datos puede considerarse como hecho inicial y, en determinado sentido, como el más sencillo (en comparación con los demás hechos). Se trata de que, por lo general, los niños empiezan a contar, ante todo, precisamente objetos

(7) Véase, por ejemplo, *A. M. Leushina*, "La preparación de los niños para asimilar los conocimientos de aritmética en la escuela". Tesis doctoral, Leningrado, Instituto Pedagógico Nacional A. I. Herzen, 1955.

homogéneos (por ejemplo, dedos). Exactamente del mismo modo, algunos de nuestros examinandos, antes de contar los objetos del grupo forman un montón sólo con los discos del mismo color y luego se ponen a contarlos (cierto es que en ellos esto no resulta tan evidente como en los niños de menos edad).

Veamos un ejemplo (Tania V. - 6; 0).
Exp.: ¿Cuántos hay aquí? (2 discos rojos y 3 verdes).
Suj.: (Los examina) 1-5.
Exp.: ¿Por qué aquí hay 5? ¿No te has equivocado?
Suj.: (Vuelve a mirar los discos) lo he mirado y lo he visto, sé contar hasta 5 (cambia 2 objetos rojos por objetos *verdes* y los coloca de manera más o menos *simétrica*).
Exp.: Pon 3 discos aquí.
Suj.: (Elige de la caja sólo discos *verdes*).

La operación de contar puede ser ejecutada por los niños, al principio, ante todo si el conjunto está formado por objetos sensorialmente homogéneos. Psicológicamente, esto significa que el niño aún no está en condiciones de hacer abstracción de los caracteres cualitativos de lo contado directamente dados. En él, la abstracción sensorial se encuentra en un bajo grado de desarrollo. Por esto el niño no domina las operaciones aritméticas. El caso es que "para contar no sólo hacen falta objetos contables, sino también la capacidad de prescindir, a la vista de estos objetos, de todas las otras cualidades menos la de su número..."(8).

El cumplimiento de las operaciones de cálculo en condiciones tan limitadas caracteriza, asimismo, otros procesos cognoscitivos de los niños: la síntesis, el análisis y la generalización.

Cuando los examinandos reciben o componen por sí mismos un grupo de discos de un mismo color, perciben lo contable como indiferenciado y unido (sintetizado)

(8) *F. Engels,* "Anti-Dühring", Gospolitizdat, 1957, pág. 37. (Obra citada, Ediciones Pueblos Unidos, Montevideo, 1961, pág. 51).

por los caracteres sensibles no generalizados de los objetos. En el caso dado, los objetos se unen espacialmente (en un montón) también gracias a la identidad de su color, forma, tamaño, etc. (son objetos iguales denominados por palabras también iguales). Los objetos se sintetizan, además, porque (esto es de singular importancia) se convierten en miembros de un conjunto y son contados por el niño, y las cosas, al ser contadas, no sólo se diferencian (como unidades separadas), sino que, además, se identifican entre sí.

Cuando el experimentador presentaba a los examinandos objetos de diferente color, es decir, cuando en el campo de la percepción de los niños irrumpía en calidad de miembro del conjunto un disco de otro color, algunos de los niños se apresuraban a apartar ese "cuerpo extraño", lo cual era una prueba de la debilidad de su síntesis sensorial, abstracción, etc. Aproximadamente del mismo modo puede explicarse también el hecho de que algunos niños al principio pusieran todos los objetos con un mismo lado hacia arriba ("sobre la espalda", como se expresó uno de ellos).

De este modo, para el niño lo más fácil, al principio, es contar objetos homogéneos por sus cualidades sensibles, es decir, el cómputo presupone cierta abstracción de las propiedades cualitativas. En el presente caso queda excluida la necesidad de la abstracción porque en el plano sensorial se han creado condiciones que nivelan las propiedades de las cuales, por lo común, es necesario abstraerse para delimitar las relaciones cuantitativas. Por esto el niño empieza a contar.

Ahora bien, la unidad sensorial de los objetos contables, necesaria al principio, desempeña también un papel negativo al encubrir las relaciones cuantitativas en el interior del grupo de objetos. Pero estas relaciones las puede analizar el niño, al principio, sólo en el interior del conjunto. De ahí que la homogeneidad sensible del conjunto, homogeneidad que vela las interconexiones dadas

entre sus partes singulares, se convierte en un obstáculo para realizar el análisis, y la percepción del mismo por parte del niño adquiere un valor decisivo.

Por lo común, los niños resuelven de manera puramente práctica, "empírica", la contradicción indicada. Partiendo de su experiencia anterior y con ayuda de las personas mayores, los niños pronto empiezan a contar objetos distintos. Del mismo modo procedieron en la mayor parte de los casos nuestros examinandos. Los demás, en cambio, poco a poco dejaron de preocuparse por la unidad cromática del conjunto, pues el experimentador cada vez con más frecuencia les presentaba discos de colores distintos, prohibiéndoles cambiarlos por otros del mismo color.

A continuación, se presenta a los niños conjuntos divididos en dos partes por el color de los objetos. Al examinarlos y contarlos, los niños comienzan a percibir lo contable como compuesto de dos grupos, es decir, gradualmente van diferenciando las relaciones cuantitativas. Los examinandos dicen, en efecto: "aquí hay 5 porque tenemos 3 verdes y además 2 rojos", señalando el montón de 3 discos y el montón de 2 (aproximadamente sucede lo mismo al presentar objetos de distinta forma). Si antes el conjunto existía para el niño en calidad de unidad casi indiferenciada, ahora se presenta a su conciencia como dividido en partes (de diferente color), lo cual permite diferenciar las relaciones cuantitativas que se dan entre ellas. De este modo comienza el proceso de análisis de las relaciones indicadas. Muchos niños diferencian a menudo, al mismo tiempo, lo contable en el sentido espacial, en los grupos correspondientes.

Veamos un ejemplo (examinando Galia O. - 6; 0).

Exp.: ¿Cuántos hay aquí? (3 discos rojos y 3 negros).

Suj.: (Los examina largo rato), 6.

Exp.: ¿Por qué 6? ¿Qué discos hay aquí?

Suj.: Porque 3 (señala los *rojos*) y 3 (señala los *negros;* correspondientemente los mueve y *comprueba* lo que dice volviendo a contar los objetos) 1-6.

Después, el experimentador presenta en especial un conjunto dividido espacialmente en dos partes (con la particularidad de que este conjunto se forma de maneras distintas: de discos de un mismo color o de discos de colores diversos). Ahora, los niños examinan también más atentamente la disposición espacial de los objetos contables, con lo que diferencian las relaciones cuantitativas entre los grupos así formados y los analizan (por ejemplo, en el interior de un grupo de cuatro objetos dispuestos en dos pares). Es importante observar, además, que algunos niños, a veces, colocaron los conjuntos de objetos de manera más o menos simétrica[9] (en forma de círculo, por pares, etc.) como si descompusieran "prácticamente" lo contable. En este caso, las relaciones cuantitativas aparecían para el niño con especial nitidez.

La acción práctica puede crear condiciones favorables para el análisis y la síntesis. Engels llamó la atención sobre el hecho de que "el acto de romper una nuez es ya un comienzo de análisis"[10]. Con ayuda de la acción se mejoran las condiciones del conocimiento. Manipulando los objetos, dividiéndolos, volviéndolos a unir, etc., el niño empieza a comprender la interconexión que entre ellos existe. Así cambia de modo esencial su percepción. En este sentido, las acciones prácticas ("externas") constituyen ya un análisis inicial y una síntesis; cumplen asimismo una función gnoseológica elemental (pese a que su papel, naturalmente, no se reduce a ella).

Al percibir un conjunto por su color y su posición en el espacio, el niño, en el transcurso de los ulteriores ex-

---

(9) Esta disposición simétrica se veía facilitada en gran manera por el siguiente recurso experimental, que nosotros hemos aplicado algunas veces: los objetos del conjunto se presentaban muy amontonados, de manera que unos estaban encima de los otros y, antes de contarlos, no había más remedio que clasificarlos y ordenarlos.

(10) *F. Engels*, "Dialéctica de la naturaleza", Gospolitizdat, 1955, pág. 176.

perimentos, hace abstracción del primero de dichos caracteres. El experimentador sigue presentando lo contable dividido espacialmente en partes, pero cada una de ellas está compuesta de discos de diferente color (por ejemplo, 5 objetos están colocados en montones de 2 y de 3 de manera que en el primer montón hay 1 disco rojo y otro verde, y en el segundo, 1 rojo y 2 verdes). Ahora, los examinandos, en su análisis de las relaciones cuantitativas empiezan a orientarse fundamentalmente en la disposición espacial de los objetos, descomponiendo los conjuntos por este rasgo. Así van haciendo abstracción, cada vez en mayor grado, del color.

Veamos un ejemplo (Seriozha T. - 5; 8).

Exp.: ¿Cuántos hay aquí? (3 discos verdes y 1 negro dispuestos en dos grupos; en el primero, hay 2 objetos verdes; en el segundo, 1 verde y otro negro).

Suj.: (Los examina) 1-4.

Exp.: ¿Por qué 4?

Suj.: (Vuelve a mirarlos) aquí hay 2 *verdes* y 1 *verde* y 1 *negro.*

Aun teniendo en cuenta, como antes, el color de los objetos, asigna más importancia a su disposición espacial (y no une los discos verdes en un montón, como habría hecho antes).

Algunos niños empezaron a hacer abstracción del color ya antes de estos experimentos: a veces ellos mismos dividían lo contable en grupos, cada uno de los cuales constaba de objetos de distinto color. Por ejemplo, Vitia T. (6; 1) de 5 objetos de cómputo separó al principio 3 discos de color negro, pero luego —de los mismos 5 objetos— separó tres discos de diferente color (2 negros y 1 rojo). En ambos casos, sin embargo, designó el conjunto con el numeral "tres". Su característica cuantitativa no varió. Otro examinando (Tolia A. — 6; 2) operó a menudo con cinco objetos de color diferente. La comparación y el análisis de estos grupos discurrió sobre el fondo de su permanente correlación con la cantidad en ellos contenida. Entonces el niño descubría que el "grupo de cinco" sigue siendo tal grupo cualesquiera que sean los objetos (rojos,

verdes, etc.) de que conste. "El ser cinco" de los objetos dados se comparaba con la misma propiedad de los 5 discos de otro color que figuraban en un montón contiguo (o que habían estado allí hacía unos minutos), conservándose invariable en todos los casos. Con frecuencia los niños decían: "Aquí *también* hay 5", "Aquí *también* hay 6", etc., registrando con ello esa invariante de la cantidad.

Por ejemplo, Valia Sh. (6; 0), al examinar y volver a contar 6 objetos (3 rojos y 3 verdes) dice: "aquí *también hay* 6... y hay rojos" (con anterioridad se le habían presentado 6 discos de otro color, dos verdes y 4 negros). Al responder a la pregunta del experimentador "¿por qué hay aquí 6 objetos? ¿No te has equivocado?", la niña dice: "he contado 1-6... (separa 3 discos: 1 rojo y 2 verdes, y junta estos objetos *de diferente color;* también forma un grupo con los 3 discos restantes, de colores distintos) ...aquí hay 3 y 3" (después vuelve a reunir todos los discos).

Vemos, pues, que el niño empieza a hacer abstracción del color de los objetos del conjunto diferenciando las relaciones cuantitativas independientemente de dicha cualidad. El análisis empieza a penetrar en su compleja estructura gracias a la "coloración", gracias a la formación de grupos cuantitativamente determinados mediante el color. Sin embargo, a medida que el examinando opera con tales conjuntos, se va convenciendo cada vez más de que la cantidad de los objetos es independiente de su color y hace abstracción de este último como carácter no esencial a la vez que empieza a diferenciar las relaciones propiamente cuantitativas ya como "descoloridas".

El color de lo contable posee para los niños un triple significado. Para ser contado, el conjunto ha de presentarse al principio en calidad de unidad monocolor; su color facilita esta síntesis. A continuación es indispensable componerlo de partes de diferente color para que el niño lo descomponga en su percepción en los correspondientes grupos; ahora el color facilita el análisis del conjunto. Finalmente, en tercer lugar, cuando el examinando ha de

dejar a un lado el color para comenzar a abstraer el aspecto propiamente cuantitativo de los objetos, el color determina el contenido negativo de los sentidos con otra abstracción. Este triple significado del color es muy importante para caracterizar la percepción que tiene el niño de las cualidades cromáticas (en general, sensoriales) del conjunto y, a través de ella, su manera de concebirlas. Es evidente que en los tres casos señalados, se trata de una percepción diferente. En las distintas etapas del desarrollo de la abstracción, es distinto el papel que la percepción desempeña.

Al hacer abstracción del color de los objetos de cómputo, el niño empieza, así, a dejar aparte algunas de las propiedades sensoriales de los mismos. A medida que se va efectuando tal abstracción, lo contable se presenta a los niños bajo otro aspecto, no como *conjunto* de objetos, cuyos caracteres inmediatamente dados, de una u otra clase, influyen de manera esencial en el modo de operar con los objetos de cómputo, sino como *multiplicidad* de elementos, cuyas diversas propiedades sensoriales no son ya esenciales para tales operaciones.

En el proceso gracias al cual un conjunto se convierte en una multiplicidad, desempeña asimismo un importante papel la abstracción que hace el niño de la disposición espacial en que se encuentra el material de cómputo. Dicha abstracción es el resultado de analizar lo contable en sus distintas posiciones sobre la mesa. Cuando el experimentador presenta un mismo conjunto dispuesto de maneras diferentes, de dos en dos, de tres en tres, en círculo, cuadrado, etc. (lo mismo hacen, a veces, muchos examinandos), el niño, comparando distintas posiciones, formas, dimensiones, etc., de una misma multiplicidad llega a convencerse de que, respecto a dichas propiedades de lo contable, es invariable (invariante) la cantidad de objetos.

Veamos un ejemplo (Tolia M. - 6; 0): 1-9 (cuenta discos). *No son 9 así*, sino así (los coloca en tres grupos, cada uno de los cuales consta de tres objetos)... 3, 3 y 3... (luego los coloca

de otro modo: a los tres grupos les corresponden, respectivamente, 2, 4 y 3 objetos). Así *también* son 9 (al principio se trataba, para él, de diferentes "grupos de nueve"; luego, parece como si se *comprobara* a sí mismo con un segundo cómputo, dudando, al parecer, de que la cantidad de objetos siguiera siendo igual a 9) 1-9... así *también* son nueve (luego los agrupa todos en un montón y vuelve a contarlos) 1-9.

La delimitación del contenido cuantitativo invariante de una multiplicidad es lo que indica que se han abstraído los caracteres sensoriales de lo contable[11]. Las relaciones cuantitativas existen para los niños ya con independencia de que se distingan o no, dentro de lo contable, grupos de objetos sensorialmente distintos con una determinada característica cuantitativa, y con independencia de cómo se distingan. Mientras que, al principio, en la mayor parte de los casos, los examinandos no descomponían en absoluto un conjunto homogéneo, después dividen en partes, por diferentes procedimientos, el material de cómputo, que es objetivamente el mismo, delimitando sus relaciones propiamente cuantitativas.

Al operar con un conjunto sensorialmente homogéneo, el niño dice que es necesario "apartarlo" y él mismo lo divide en grupos espacialmente separados. Tomemos un ejemplo (Andriusha T. — 6; 5). *Exp.:* ¿cuántos hay, aquí?

---

(11) Piaget estudió especialmente el concepto que tienen los niños de invariante cuantitativo (modificando las propiedades sensorialmente dadas de lo contable). Véase *J. Piaget*, "La genèse du nombre chez l'enfant", 1941. Se trata, sin duda alguna, de una condición importantísima para el desarrollo de la abstracción en el niño. Sin embargo, Piaget se sitúa en una posición operacionalista para explicar sus interesantes hechos. Subraya en el primer plano las propiedades formales de las operaciones (de cómputo, lógicas). A juicio suyo, dichas propiedades se hacen invariantes y reversibles sólo en la medida en que se correlacionan entre sí. No tiene en cuenta suficientemente la relación entre dichas propiedades y el objeto. De ahí que según Piaget el número sea objetivo en la medida en que es invariante y no viceversa, como ocurre en realidad.

(se trata de un conjunto de 7 objetos, sensorialmente homogéneos). *Suj.*: hay que *ordenarlos* (los coloca en grupos: 3, 3 y 1)... aquí hay 7. *Exp.*: ¿por qué, 7? *Suj.*: (*otra vez* mira los discos) porque... 3 y 3 serán 6... y 1 son 7. En otro caso, los niños fundan su determinación de la cantidad de objetos, por ejemplo, del siguiente modo: "aquí hay cinco porque tenemos 4 y 1" (en la mesa hay un "grupo de cinco" objetos divididos en 2, 2 y 1 o bien en 3 y 2). El examinando en cierto modo "transfiere" a un nuevo objeto, a las multiplicidades, haciendo abstracción de sus cualidades sensoriales singulares, los "procedimientos" de descomposición (análisis), anteriormente elaborados, de los conjuntos. Para el niño, las relaciones cuantitativas empiezan a determinarse como regularidades propiamente aritméticas (un grupo de cinco está formado por 2 y 3 objetos no sólo porque, en el caso dado, consta de 2 discos rojos y 3 negros, sino, también, porque cualquier grupo de 2 y 3 objetos es igual a 5 objetos). De este modo, precisamente, operan ahora los examinandos con la multiplicidad y fundamentan su resolución de los problemas de cómputo.

La conversión de un conjunto en una multiplicidad significa que los niños se abstraen de las cualidades sensoriales singulares del objeto de cómputo, pero ello no constituye una abstracción completa del objeto inmediatamente dado como tal. Para resolver los problemas aritméticos, los examinandos han de tener ante los ojos los objetos materiales de cómputo, aunque sean indiferentes, "neutrales" por sus caracteres perceptibles (dedos, círculos y señales diversos en el parte del experimentador, etc.). Éste es el estadio más elevado en el desarrollo de la abstracción sensorial: los objetos de cómputo pierden totalmente para el examinando la "individualidad" sensorialmente perceptible, las singularidades y diferencias de sus propiedades perceptibles de manera directa, mas, para él, siguen siendo objetos (y no números) sensorialmente dados, de los cuales no puede aún abstraerse por

completo al realizar las operaciones de cómputo[12]. Si se le prohibe utilizar los objetos, contará con los dedos.

Esta etapa del análisis de las relaciones cuantitativas, se caracteriza, asimismo, por el hecho de que los niños, como antes —al fundamentar su determinación de la cantidad— examinan la multiplicidad por segunda vez, como si quisieran comprobar la exactitud de la operación del cómputo (véase más arriba). En el caso dado, se ven obligados a examinar nuevamente los objetos con el fin de operar sin equivocarse con las relaciones cuantitativas de los mismos. Por ejemplo, el examinando dice: "Aquí hay 5 porque 3 y 2 juntos son 5". Al razonar de este modo, ve ante sí 2 y 3 discos, y se convence de que su respuesta es acertada. Además, a veces los cuenta otra vez ("1, 2, 3, 4, 5") con el mismo fin. Por consiguiente, las relaciones cuantitativas —haciendo plena abstracción de los objetos desde el punto de vista de sus propiedades sensibles— aún no aparecen de por sí para el niño. Éste, de tiempo en tiempo, las correlaciona directamente con el material de cómputo, en cierto modo las "proyecta" sobre él[13].

Tenemos, pues, que la conversión de los conjuntos en multiplicidades es un resultado del proceso de análisis de las relaciones cuantitativas. El producto que se forma —a medida que se va constituyendo— se incluye en el proceso cognoscitivo. Ahora cambia el objeto del análisis. En dependencia de este cambio se modifica, también, el proceso del análisis mismo. Al operar con una multiplicidad, es decir, con relaciones propiamente cuantitativas, los niños

---

(12) Hemos observado el nivel inferior de la abstracción sensorial cuando el niño procuraba apartar del campo de su percepción un círculo de color distinto que, al aparecer, alteraba la unidad perceptiva de lo contable.

(13) Esta etapa del análisis y de la abstracción de las relaciones cuantitativas también se estudió en la III serie de experimentos (véase más adelante).

analizan de manera directa precisamente estas últimas y no la interconexión entre los grupos de conjuntos, sensorialmente distintos.

El análisis de la multiplicidad se convierte en análisis de las relaciones numéricas elementales cuando el niño se abstrae por completo de los objetos de cómputo desde el punto de vista de sus propiedades sensorialmente dadas y lo contable empieza a presentarse para él en calidad de número. Este proceso se caracteriza, ante todo, por el modo como los examinandos realizan operaciones aritméticas. Al cumplir las indicaciones del experimentador no comprueban su propia determinación de la cantidad de discos mediante un cómputo repetido (o volviéndolos a examinar) con la frecuencia de antes. Hasta ese momento, dicha comprobación constituía la instancia suprema en que se resolvían todas las dudas del niño. Ahora, en cambio, al fundamentar su resolución, éste dice, por ejemplo: "aquí hay 6 porque 5 y 1 son 6", sin mirar por segunda vez lo contable. Seis como 5 más 1 es algo ya completamente establecido para él: no considera necesario comprobarlo.

Vemos, por tanto, que las relaciones numerales se analizan, al principio, como interrelaciones entre las partes de la multiplicidad. En consecuencia, los niños pueden controlar sus soluciones únicamente volviendo por segunda vez a lo contable. Gradualmente para ellos, las interrelaciones numerales más sencillas empiezan a estar determinadas cada vez en menor grado por las relaciones correspondientes de los objetos (los niños no vuelven a examinar lo contable). Éste es el comienzo del análisis directo de la composición del *número* (no a través de la *multiplicidad* analizada).

Se convierten en objeto de análisis y abstracción las relaciones numerales multívocas. Los niños ven distintas interconexiones entre los números. Así, el número "tres", para ellos, es 1, 1 y 1, o bien 2 y 1; el número "cinco" es 3 y 2, o bien 4 y 1, etc.

He aquí un ejemplo (Misha P. - 6; 3).
Exp.: ¿Cuántos hay aquí?
Suj.: (Examina los discos) 1-5.
Exp.: ¿Por qué 5?
Suj.: (*Sin* mirar los objetos) a 4 se añade 1... *o bien* se puede... añadir 2 a 3.

Cuando el niño comienza a penetrar mentalmente en la estructura de las dependencias entre los números, éstos se le aparecen no sólo en función de las multiplicidades que designan, sino, además, en la relación inmediata entre aquéllos. Esto se manifiesta, ante todo, en la manera en que el niño forma las operaciones de adición.

En los experimentos finales de la II serie, el experimentador mostraba de qué modo ha de adicionarse el segundo sumando al primero. Los niños enseguida o casi enseguida comprendían su breve explicación y utilizaban esa ayuda ("sugerencia") ajena[14].

En dichos experimentos se aplicó la metodología siguiente: El experimentador señalaba el primer sumando y decía "aquí hay cinco"; luego, añadiendo (uno a uno) los discos del segundo sumando, continuaba "5 y 1 son 6. Luego... 6 y 1 son 7", etc. A continuación se invitaba al niño a hacer lo mismo. El primer sumando se presentaba de distintas maneras: como grupo de objetos diferentes, en forma de cifras, etc. A veces, el experimentador señalaba sencillamente con un gesto la mesa vacía y decía: "¡aquí hay 5 discos! Añade a estos 5 otros 3".

He aquí un ejemplo: (Galia O. - 6; 0).
Exp.: ¿Cuánto es 5 + 4? (presenta 5 y 4 objetos)[15].
Suj.: (Comienza a *contarlos*) 1, 2...

---

(14) Verdad es que tres niños pasaron a la adición un poco antes (antes de terminar los experimentos de la II serie) y como espontáneamente, o, por lo menos, pasaban a las formas más sencillas de la adición. Pero incluso en estos reducidos casos efectuaban la suma aritmética ante todo por medio del cómputo.

(15) La examinando había contado antes cada uno de los sumandos.

Exp.: ¡Espera! ¿Cuántos hay aquí? (señala el montón de 5).
Suj.: 5.
Exp.: ¿Por qué vuelves a contar estos discos?... 5 y 1, juntos, ¿cuánto es? (une un objeto a los cinco).
Suj.: 6.
Exp.: Continúa añadiendo.
Suj.: (Añadiendo 3 discos, uno a uno) 1, 2, 3.
Exp.: No, así no (indica cómo hay que sumar).
Suj.: (*Adicionando* al 5, uno a uno) 6, 7, 8, 9 (se sonríe).
Exp.: ¿Cuánto es, pues, 5 + 4?
Suj.: 9 (luego lo *comprueba* volviendo a contar) 1-9.
Exp.: ¿Cuánto es 6 + 5? (presenta 6 y 5 discos).
Suj.: Uno... no, seis (va adicionando uno a uno), 7, 8, 9, 10, 11.
Exp.: ¿Cuántos hay aquí? (2 discos).
Suj.: 2.
Exp.: Ahí hay 4 (señala con un gesto un sitio vacío de la mesa). ¿Cuánto es 4 + 2?
Suj.: (Adicionando los objetos) 5, 6.

Hasta ahora el niño ha ejecutado la suma por medio del cómputo. Por ejemplo, al añadir a 6 discos 4 y "sabiendo" bien (sobre la base del recuento que acababa de realizar de los objetos de cada grupo por separado) que en el primer sumando hay 6 objetos, y en el segundo, 4, cuenta, a pesar de todo, el grupo de seis y después va añadiendo uno a uno los discos del segundo sumando: "1, 2, 3, 4, 5, 6, - 7, 8, 9, 10". El recuento de los 6 objetos atestigua que el numeral "seis" no designa para los examinandos las relaciones cuantitativas que ya han sido abstraídas de lo contable. El grupo de seis en su significado objetivo, para los niños, está determinado directamente por los objetos (por su recuento directo). De ahí que cuando es necesario realizar la suma, los niños en cierto modo "crean" otra vez el sumando de partida volviendo a contar el conjunto. En cambio, cuando el niño asimila la operación de sumar, enseguida adiciona al primer sumando las unidades del segundo sumando, por ejemplo: "6 - 7, 8, 9, 10". Ahora, el grupo de seis, desde el comienzo mismo se presenta como una formación única dada, con la que el examinando opera como con un objeto independiente.

Saber hacer la adición es un testimonio de que el contenido cuantitativo de lo contable se presenta para el niño en calidad de números, en calidad de concepto elemental. El numeral "seis" designa ya no sólo el mero resultado de contar objetos sensorialmente dados, sino un número que existe en la mente del niño con relativa independencia del correspondiente grupo de objetos. Cuando los niños cuentan "1, 2, 3, 4, 5, 6" y cuando añaden enseguida "6 - 7, 8, 9, 10", operan psicológicamente con distintos "grupos de seis".

El hecho de que, como resultado del análisis de las relaciones numéricas elementales y cuantitativas (seguido por nosotros en sus rasgos más generales), el niño forme el concepto de número, se demuestra también junto con otros datos experimentales. Al ir aprendiendo las operaciones de la adición los niños al principio comprueban (como hasta entonces, por iniciativa propia), mediante el cómputo, la suma que han ejecutado. Para ellos, los números todavía no están plenamente determinados por relaciones propiamente matemáticas, en las que aún no confían, como si dijéramos, del todo. Por esto los examinandos se apresuran a convencerse de que el resultado que han obtenido es acertado y lo hacen por el procedimiento a que están acostumbrados y que es, sobre todo, experimental, "empírico" (véase más arriba). Después de algunas comprobaciones de este tipo empiezan a confiar, también, en las conclusiones puramente aritméticas ("teóricas"). Es evidente que Marx llamó ante todo en dicho sentido al cómputo del niño "la primera actividad teórica de la razón, que oscila aún entre la sensibilidad y el pensamiento"[16].

Como quiera que el concepto inicial de número existe para los niños en calidad de objeto con cierta independencia, los examinandos operan con el primer sumando precisamente como con un número, al margen de la forma en

---

(16) *C. Marx y F. Engels*, "Obras", t. 1, 2ª edic., pág. 31 y siguiente.

que se presente (de cifra, de gesto para indicar un lugar vacío de la mesa, etc.), o sea "transfieren" los procedimientos de adición a nuevas condiciones. Por tanto, el niño ha analizado y generalizado las relaciones numéricas hasta tal punto que éstas empiezan a presentársele en el sistema de su serie natural, con abstracción de lo contable.

Por ejemplo, algunos examinandos, sin recurrir ya a los objetos, operan como si empezaran a comprender la ley de desplazamiento de la suma (Andriusha T. - 6; 5).

Exp.: ¿Cuánto es 7 + 5? (7 y 5 objetos).
Suj.: (Adiciona) 8, 9, 10, 11, 12 (luego los junta a los 7).
Exp.: ¿Por qué, a los 7?
Suj.: (Vuelve a mirarlos) porque 7 y 5 son 12.
Exp.: ¿Cuánto será 5 y 7? (cambia el orden de los sumandos).
Suj.: (No mira los objetos; después de una pausa) *también* 12.

Obsérvese que los niños "transfieren" también los procedimientos de adición a sumandos con los que no ha operado o casi no ha operado (números 9, 13 y otros) en el transcurso de los experimentos. Semejante "transferencia" se explica por la generalización de las relaciones numerales elementales. (Acerca de la generalización que conduce a la "transferencia", véase el artículo de K. A. Slávskaia en el presente libro). Es erróneo creer que el niño aprende a realizar la adición porque "se acuerda" simplemente de la tabla de sumar: no es posible recordar la tabla si se desconocen todos sus elementos. Además, el mismo hecho de recordarla constituye, en cierto sentido, un producto del proceso indicado.

El proceso de análisis de las relaciones cuantitativas y numerales se lleva a cabo sobre la base de las palabras numerales y, al mismo tiempo, constituye un proceso en virtud del que se forman los significados de las mismas. Un mismo numeral, al principio y al término de los experimentos realizados, forma, psicológicamente, dos palabras distintas. El numeral designa, al principio, objetos de cómputo sensorialmente dados; después, empieza a designar un concepto, el número.

Como ya se ha indicado, el resultado del proceso de análisis de las relaciones cuantitativas y numerales es el de la formación del concepto inicial de número en el niño. A medida que se va formando, el nuevo producto se incluye en el proceso y modifica la orientación del mismo. Ahora los niños no analizan ya las relaciones cuantitativas de la multiplicidad, sino las relaciones numéricas. Comienza el análisis de la composición del número en lo que tiene de específico (5 es 2 y 3, 4 y 1, etc.).

El que se forme la operación de adicionar como producto e indicador de un proceso cognoscitivo indica que el paso del cómputo a la adición (como también del cómputo elemental al de resultados) tiene carácter mediato, se efectúa a través del pensamiento del niño (en el cual las operaciones de cómputo y adición se incluyen en calidad de productos del pensar y como formas suyas). Sin estudiar el proceso indicado, no puede explicarse de qué modo llega el niño a ejecutar tales operaciones.

Enfocando así la formación del concepto de número y de las primeras operaciones aritméticas que efectúa el niño, puede resolverse, también, el problema relativo a la importancia que para tal formación tienen el cómputo y la denominada "percepción del número". Para superar la "alternativa" que entre dichos procesos se da, es necesario tener en cuenta que, en este caso, la percepción constituye ante todo un proceso cuyo resultado es precisamente la "apreciación inmediata de la cantidad". La percepción se desarrolla incluyéndose en el proceso del pensar. En las distintas etapas, el niño no percibió lo mismo, pese a haber examinado los mismos objetos. Finalmente, se ha de tener en cuenta que el número (como todo contenido conceptual de un objeto), no puede percibirse, se concibe.

El cómputo, que realizan los niños bajo la forma de operaciones, ha de estudiarse (igual que la percepción) como incluido en el proceso mental, del que es un producto. Por ejemplo, la operación de cómputo más sencilla exige ya de quien la ejecuta la aptitud para diferenciar

e identificar los objetos materiales como objetos de cálculo. En este sentido, el cómputo, que llega a dominarse mediante el análisis de las relaciones cuantitativas, se convierte en una de las formas de semejante análisis (y síntesis). Así, pues, es necesario ver la operación de contar y la percepción de lo contable no como fenómenos aparte uno del otro, sino como formas y productos —que se completan recíprocamente— de un proceso único de análisis de relaciones cuantitativas.

En el presente trabajo, el proceso de análisis de las relaciones cuantitativas y de las relaciones numerales más sencillas, ha de estudiarse sólo en algunos de sus eslabones y en sus rasgos más generales. Los hechos obtenidos necesitan de ulterior estudio (ello concierne, sobre todo, a la transformación de la multiplicidad en número). Puede considerarse, sin embargo, que aquí ha sido inicialmente confirmada la hipótesis expuesta, según la cual el proceso de análisis indicado lleva al niño a formar la adición.

* * *

En la serie de experimentos de control se comprobaron los resultados obtenidos en la serie anterior (la principal). En dicha serie —tercera— estudiamos también cómo se forma la operación de adicionar. Sin embargo, en este caso el experimentador explicó a los niños bastante antes (ya en los primeros experimentos) de qué modo se ha de realizar dicha operación, cuando los niños no habían analizado las relaciones cuantitativas y numerales o cuando se encontraban en las etapas iniciales de su análisis. Se suponía, además, que si la operación de adicionar se formara como resultado del proceso cognoscitivo a que nos referimos, los niños no llegarían a dominarla, pues no estarían en condiciones de analizar con profundidad suficiente las relaciones cuantitativas.

Para comprobar esta conjetura se llevaron a cabo unos 100 experimentos con 13 examinandos (10 párvulos

de jardines de infantes y 3 alumnos de la primera clase). Los experimentos confirmaron el acierto de la conjetura: ninguno de los niños llegó a dominar la adición.

Durante los experimentos, algunos examinandos empezaron a dar golpecitos con el dedo sobre la mesa a medida que contaban (sin tocar los discos) tantas veces como objetos había en el sumando de partida, como si los contaran dando golpes, y luego efectuaron la suma.

Así lo hizo, por ejemplo, Iura K. (6; 2).

Exp.: ¿Cuánto son 5 + 4? (sobre la mesa hay 5 y 4 objetos).

Suj.: (Empieza a *contar de nuevo* el primer sumando) 1, 2...

Exp.: No, añade, como te he enseñado.

Suj.: (Cuenta dando golpes el primer sumando) 1, 2, 3, 4, 5; (luego añade los objetos del segundo sumando) 6, 7, 8, 9.

Ofrecen singular interés los casos en que el sumando inicial se presentaba en forma de ficha numerada. Independientemente de la cantidad por ella indicada, la ficha era tomada por los niños, de hecho, como una "unidad" (la denominaban "uno").

He aquí un ejemplo (Viera M. - 6; 0).

Exp.: ¿Cuánto son 2 y 5? (cifra de 2 y de 5 objetos).

Suj.: (Pone en la ficha un disco) uno...

Exp.: ¿Cuántos?

Suj.: 2 (señala la ficha y el disco).

Exp.: Sigue.

Suj.: (Une pieza a pieza los demás discos, a veces hace su *recuento;* a la ficha la llama "uno") 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Exp.: ¿Cuántos hay aquí? (ficha con un 5).

Suj.: 5.

Exp.: ¿Y cuántos, aquí? (3 discos).

Suj.: 3.

Exp.: ¿Cuánto es 5 y 3? Añade, como te he enseñado.

Suj.: (Señala la cifra con el dedo) *cinco* (luego junta a la ficha, pieza a pieza, 3 discos), *dos,* tres, cuatro; son 4 (al decir "cinco", el niño se refiere sólo a un objeto: la ficha con el 5 impreso). Sin embargo, en los demás casos los niños operaron correctamente con la ficha.

A medida que realizan los subsiguientes experimentos, algunos examinandos empiezan a utilizar de manera algo distinta la ficha. Algunos de ellos a veces cuentan dando golpes (vuelven a contar) su correspondiente número una vez o cuentan elementos separados (los denominan rayitas o circulitos) de su representación gráfica. La cifra 3, por ejemplo, se presenta como dividida en dos "partes", en dos "semicírculos" (superior e inferior). En consonancia con ello, se hace el recuento: "uno, dos". En algunos casos, la cifra 2 se "encerraba" especialmente en un círculo trazado a lápiz y entonces se tomaba por 2 (y no por 1, como antes).

Vemos, pues, que en las condiciones en que se realizaban los experimentos de la III serie, los examinandos no llegaban a dominar la adición. Al ejecutar la suma aritmética, volvían a contar, por segunda vez, el sumando inicial. Por consiguiente, éste no aparecía, para los niños, en calidad de número. Los examinandos no efectuaban con la profundidad que ello requería el análisis de las relaciones cuantitativas. Por este motivo no llegaban a realizar la operación aditiva, mientras que en los experimentos de la II serie, los niños, que habían analizado las relaciones cuantitativas y numerales y las habían generalizado hasta el nivel de la abstracción conceptual, asimilaron felizmente la adición.

La comparación de los resultados obtenidos en ambas series de experimentos confirma, pues, que *una de las condiciones esenciales para que pueda formarse la operación aditiva estriba en que el niño efectúe el análisis, la síntesis, la abstracción y la generalización de las relaciones cuantitativas y de las numerales elementales*. De este modo se confirma nuestra hipótesis inicial.

La III serie de experimentos permite también elucidar este proceso cognoscitivo desde un punto de vista algo distinto. En los experimentos finales, los examinandos comienzan a operar mediante procedimientos bastante complicados con conjuntos y multiplicidades: cuentan dando

golpecitos el primer sumando, procuran utilizarlo en forma de cifra, etc. El que algunos niños hagan uso de un material de cómputo tan diverso significa que con facilidad hacen abstracción de algunas cualidades sensibles del objeto, pero aún no del objeto como tal en sus cualidades directamente perceptibles, es decir, lo contable se les presenta en calidad de multiplicidad. El niño se encuentra en el nivel de la abstracción sensorial altamente desarrollada, por lo cual, aunque los objetos de cómputo han de ser materiales, no importa de qué clase sean sus caracteres perceptibles (dedos, discos diversos, "rayitas", etc.).

El niño no ha formado aún el concepto inicial de número. En este caso —sobre todo cuando al niño se le presenta el primer sumando en calidad de cifra— parece como si él mismo "creara" lo contable golpeando suavemente el extremo de la mesa con el dedo o bien contando a golpes el sumando en el aire, sin tocar la mesa. En este caso, el cómputo con los golpes, *con los gestos,* es un cómputo de *gestos* como símbolos peculiares del contenido de la multiplicidad, dado en los sentidos. Este estadio transitorio en el desenvolvimiento del análisis de las relaciones cuantitativas resulta intermedio entre el análisis sensorial y el conceptual[17].

Los experimentos de la III serie nos proporcionan, por ende, cierto material complementario para caracterizar el proceso de análisis de las relaciones cuantitativas en aquel estadio del análisis en que tales relaciones aparecen para el niño en el interior de la multiplicidad. En esa etapa, el análisis no está tan adelantado como para que el examinando pueda aprovechar la ayuda ajena, la "sugerencia" del

(17) El estadio inferior en el desarrollo de la abstracción sensorial queda ilustrado con ejemplos, muy conocidos, de que algunos niños a los 4 años, aproximadamente, de edad, sólo pueden contar sus dedos. Véase en particular el libro de *V. Stern,* "Psicología del niño hasta los seis años", Petrogrado, 1922, pág. 201.

experimentador que le explica cómo ha de hacerse la adición. En cambio, en la segunda serie, cuando la "sugerencia" se ofreció en las últimas etapas del análisis de las relaciones cuantitativas y numerales, los niños la aprovechaban con éxito rápidamente, pues partiendo de semejante análisis forman el concepto inicial de número. La imposibilidad de aprovechar tal "sugerencia" en la III serie es una prueba de que el análisis de las relaciones cuantitativas no ha creado aún la premisa necesaria para pasar de la multiplicidad al número.

* * *

Sinteticemos lo expuesto. Los experimentos de la I serie nos permitieron estudiar uno de los eslabones del análisis inicial de las relaciones cuantitativas elementales que sirve de base al mismo para llegar a dominar el cómputo de resultados. Los experimentos de la II serie permitieron ver, en líneas generales, de qué modo sigue desarrollándose en el niño el conocimiento de las relaciones cuantitativas.

Al principio, el niño no estaba en condiciones de hacer abstracción de las diferentes cualidades sensoriales de los objetos de cómputo: cuenta sobre objetos sensorialmente homogéneos (de un mismo color, etc.), los cuales se agrupan y se sintetizan —para él— en un conjunto sobre la base de su manifiesto carácter común. En estas circunstancias, al niño le resulta singularmente fácil efectuar operaciones de cómputo, pues queda excluida la necesidad de haber abstracción de las propiedades cualitativas sensorialmente dadas de lo contable y, con ello, aparecen en un primer plano las relaciones cuantitativas más simples. Ahora bien, en este caso, se complican las condiciones para el análisis de relaciones cuantitativas más complejas, pues las interrelaciones entre las partes distintas de un conjunto homogéneo no aparecen en la percepción del niño con suficiente precisión.

Gradualmente —basándose en su experiencia anterior y con ayuda de las personas mayores— los niños empiezan a contar, también, objetos sensorialmente distintos (por ejemplo, un conjunto de objetos rojos y verdes). Operando con lo contable, compuesto de dos grupos de objetos de diferente color, objetos que, por otra parte, pueden estar colocados de modo distinto sobre la mesa, el niño diferencia las relaciones cuantitativas entre los grupos que así se forman, espacialmente discontinuos o diversos por el color. El *conjunto* primeramente único, indiferenciado para los niños, agrupado en un todo por sus cualidades sensoriales, se descompone, ahora —también en función de tal o cual carácter sensorialmente dado— en varias partes. En estas condiciones, las relaciones cuantitativas existentes entre dichas partes aparecen con toda claridad para el niño.

A medida que los niños analizan los diversos conjuntos y se convencen de que es invariable (invariante) la cantidad de los objetos aunque se modifiquen sus propiedades sensoriales aisladas, hacen abstracción de estas últimas. Como resultado de semejante abstracción, lo contable comienza a presentarse al niño no ya como un conjunto, sino como una *multiplicidad,* de la cual tales o cuales caracteres perceptibles no son esenciales para operar con ellos aritméticamente. Ahora los niños distinguen las relaciones propiamente conceptuales independientemente de los objetos con que operen (de colores diversos o no, formando un solo grupo o varios grupos, etc.). El análisis de las relaciones conceptuales se realiza, pues, en un nivel más elevado (el grupo de cinco es concebido como 2 y 3 objetos de cómputo conjuntamente tomados, no sólo por estar formado, en el presente caso, de 2 discos rojos y 3 negros, sino, además, porque 2 y 3 objetos, cualesquiera que sean, constituyen 5 objetos). Éste es el nivel más alto en el desarrollo de la abstracción sensorial: los objetos de cálculo pueden ser de cualquier clase por sus caracteres perceptibles, mas aún han de aparecer para el

niño como objetos inmediatamente dados. La característica de lo contable como multiplicidad significa que los niños, al analizar las relaciones cuantitativas, hacen abstracción de las propiedades sensoriales singulares de los objetos que se cuentan, mas esto no constituye una abstracción completa del objeto como tal en sus caracteres sensorialmente dados. Al efectuar las operaciones aritméticas, los niños se ven obligados, a pesar de todo, a referirse de manera directa a los objetos materiales. Las relaciones cuantitativas existen para los niños sólo como relaciones entre partes distintas de una multiplicidad, o sea, en conexión directa con lo contable (si bien "neutros" en lo tocante a sus cualidades sensoriales).

El análisis de la composición cuantitativa de la multiplicidad se convierte en análisis de las relaciones numéricas simples cuando el niño comienza a hacer total abstracción de los objetos de cómputo dados directamente. En este caso, lo contable comienza a presentarse para él en calidad de concepto inicial de *número*. Los niños analizan relaciones numéricas multívocas (5 es 2 y 3 o bien 4 y 1, etc.) que, como resultado de su generalización, aparecen como tales. Sobre la base de este proceso de conocimiento, los niños llegan a dominar las operaciones de sumar en la forma de adición.

L. I. ANTSIFIOROVA

EL PAPEL DEL ANALISIS EN EL CONOCIMIENTO DE LAS RELACIONES DE CAUSA Y EFECTO

En los problemas de carácter científico y técnico, a menudo es necesario analizar la causa de un efecto dado: buscar las causas de las interrupciones en el trabajo de una máquina-herramienta, de un motor, etc. Teniendo esto en cuenta, de los varios problemas en cuya base se encuentran las relaciones de causa y efecto, hemos elegido uno en que era desconocida la causa de un efecto dado[1]: era necesario equilibrar los platillos de una balanza de tal modo que el equilibrio se alterara por sí mismo, poco más o menos al minuto de establecido, sin intervención de nadie. Para equilibrar los platillos de la balanza, se daba a los examinandos varios objetos, entre los que había una vela. El problema se resolvía equilibrando el peso de la vela encendida, la cual, al arder, provocaba al poco rato el desequilibrio de la balanza. El examinando, por ende, tenía que diferenciar en la vela una determinada propiedad: la pérdida de peso a consecuencia de la combustión.

Por lo común, el examinando desde sus tiempos de escolar conocía bien el nexo de causa y efecto entre la combustión de un objeto cualquiera y su pérdida de peso.

---

(1) Hemos aplicado el problema ideado por el psicólogo húngaro Székely. (*L. Székely*, "Studien zur Psychologie des Denkens. Zur Topologie des Einfalls", «Acta psychologica», vol. V, 1940). En varios puntos hemos modificado la metodología de los experimentos. Sin embargo, hemos dejado sin modificar puntos esenciales de la metodología para poder comparar los resultados obtenidos.

Ahora bien, la combustión de la vela tiene varias consecuencias, no una sola: produce luz, calor, humo, gotas de cera derretida, etc. De todas estas consecuencias de la combustión de la vela, el sujeto ha de destacar una: la de la pérdida de peso. En las circunstancias habituales, esta propiedad de la vela encendida no es esencial, es desplazada a un segundo plano por otra de sus propiedades: la de dar luz.

En el problema elegido, lo mismo que en los problemas técnicos análogos, la dificultad estriba en que se da indiferenciado el efecto cuya causa es necesario hallar. Ha de ser analizado el contenido del efecto dado en el objeto, y en dicho contenido se han de distinguir relaciones esenciales. Se ha de concretar el efecto. Por ejemplo, en el caso de las interrupciones en el trabajo de una máquina-herramienta, el efecto concreto puede ser el desgaste de alguna de las piezas. Encontrar las causas de un efecto concreto semejante es mucho más fácil que encontrar las de un efecto dado en su forma general (paro de la máquina-herramienta).

En el problema presentado por nosotros, el efecto (la "alteración del equilibrio") se presenta como cambio de posición de uno de los platillos respecto al otro. Para resolver el problema, es necesario analizar este efecto y, con ello, destacar el componente esencial, la nueva relación de esencial importancia: no simplemente el cambio de posición de uno de los platillos de la balanza respecto al otro, sino, además, el cambio de peso de la carga en uno de los platillos.

La investigación incluía tres series. En cada una de ellas, el problema se formulaba de la misma manera: había que equilibrar la balanza de tal modo que el equilibrio, después de mantenerse cerca de un minuto, se alterara por sí mismo, sin que interviniera nadie. La diferencia entre las series consistía en lo siguiente: en la primera serie, ante el examinando se encontraban la balanza y los objetos para equilibrarla; en la segunda serie, en

vez de los objetos reales, se daba una lista de los mismos; en la tercera serie, el problema se resolvía sólo mediante el análisis teórico.

A los examinandos se les invitaba a pensar en voz alta. Si éstos callaban, el experimentador les preguntaba cómo creían que iban a continuar resolviendo el problema, etc. Si no lograban resolverlo, se les hacía diversas "sugerencias".

Todas las reacciones y cuanto decían los examinandos se anotaba cuidadosamente. Algunos de los experimentos se registraron en cinta magnetofónica.

En cada serie participaron 13 individuos.

Cada experimento duraba de hora a hora y media. Los examinandos eran estudiantes de escuelas superiores y de una escuela de medicina; todos habían terminado la escuela media.

En la I serie, seis examinandos resolvieron el problema por sí mismos; siete necesitaron la ayuda del experimentador. De los seis que resolvieron el problema por su cuenta, cuatro propusieron, primero, que se utilizaran objetos o substancias cuyo peso disminuyera por medio de la evaporación, y sólo después de esto supieron emplear para la resolución del problema los objetos dados: la vela y las cerillas. Únicamente dos de los examinandos, en calidad de primera resolución del problema, propusieron que se disminuyera el peso de los objetos por medio de la combustión. Es interesante señalar que estos dos examinandos encontraron la solución sólo a los 40 y 42 minutos de trabajo, mientras que la idea de aplicar substancias volátiles se les ocurrió a los cuatro examinandos indicados, respectivamente, al minuto, a los siete minutos, a los dieciséis y a los treinta y cuatro. Los examinandos que resolvieron el problema con la ayuda del experimentador propusieron que se utilizara, en calidad de primer procedimiento de resolución, una substancia que se evaporara rápidamente. Tenemos, pues, que la mayor parte de los

examinandos, para resolver el problema, tenían que franquear los límites de la situación dada y recurrir a objetos que no les habían sido presentados.

En la II serie, todos los examinandos resolvieron el problema sin ayuda del experimentador. 11 lo hicieron en el primer experimento (4 de ellos, enseguida) y dos, en el segundo.

En la III serie, 9 personas resolvieron el problema en el primer experimento (de ellas, 6 lo hicieron enseguida), y 4 en los experimentos segundo y tercero.

De las 13 soluciones obtenidas, sólo una se basaba en el cambio de peso de la substancia por medio de la combustión. Los demás examinandos proponían utilizar substancias que se evaporaban rápidamente o que se empapaban rápidamente de humedad.

El examen general de los datos recogidos muestra que la gran mayoría de los examinandos *en todas* las series resolvieron el problema mediante el análisis teórico, y resultaron, también, muy semejantes, la orientación fundamental que dieron a dicho análisis y las etapas sucesivas del mismo.

Los experimentos mostraron que el análisis teórico del problema no ofrece grandes dificultades para los examinandos, mientras que la posibilidad de manipular prácticamente con objetos hace más lento el paso al análisis teórico, o, dicho con más exactitud, lo demora al principio.

* * *

Los examinandos que resolvieron el problema enseguida, modificaron la formulación, antes de comenzar a resolverlo, destacando el elemento esencial: la carga en los platillos de la balanza. El examinando S. V., por ejemplo, cambia la formulación del problema del siguiente modo: "En una balanza desequilibrada, hay que añadir una carga que mantenga cierto tiempo el equilibrio y luego éste se altere sin intervención de nadie". Dicho de

otro modo: este examinando enseguida delimitó la causa próxima de la alteración del equilibrio de la balanza (cambio del peso de la carga) y, de este modo, concretó el efecto dado en forma que asegurara la rápida resolución.

Todo el proceso de la resolución transcurre en forma de experimento práctico y mental: los examinandos o bien introducen prácticamente cambios reales en la situación, modifican en ella las relaciones entre los objetos y analizan luego los resultados obtenidos, o bien eligen mentalmente algún medio de acción empezando por analizar los efectos posibles de dicha acción. En cuanto al contenido del proceso de la resolución nos es dado por el análisis gradual de las propiedades de los diferentes "instrumentos" o recursos de acción como causas supuestas del efecto que se ha concretado. En el proceso de la resolución, el contenido del efecto en lo tocante al objeto determina la selección de las causas, o sea, de los objetos con determinadas propiedades, y de las formas de actuar mediante las mismas. Sin embargo, el análisis de los resultados de la acción que se ejerce mediante los instrumentos dados, lleva a cambiar el efecto, que se convierte, ahora, en causa de la selección de nuevos recursos para descubrir nuevas propiedades en los anteriores.

El proceso de la resolución del problema pasa por varias etapas.

Desde el punto de vista externo, la *primera etapa* aparece como análisis de los requisitos básicos del problema: establecimiento exacto del equilibrio, alteración del equilibrio y no intervención. En esta etapa, el efecto (alteración del equilibrio) suele entenderse como desplazamiento de un platillo respecto al otro. La no intervención, se entiende como norma que prohibe tocar directamente con la mano el platillo de la balanza.

En consonancia con esta idea, los examinandos recurren a los procedimientos más simples y toscos para actuar sobre la balanza. Con esos "instrumentos" establecen

las formas más simples de la relación entre causa y efecto: desplazamiento, cambio de lugar del objeto con que se actúa. Los examinandos de la I serie proponen hacer viento agitando una tablita, inclinar la base sobre la que se sustenta la balanza, soplar sobre el platillo, etc.

Los examinandos de la II serie, al encontrarse en la primera etapa del análisis del problema, enseguida intentaron utilizar la vela para la resolución, pero en la vela sólo veían la propiedad de "soporte". Así, por ejemplo, uno de los examinandos —una muchacha— propone: "Si colocamos la vela debajo de un platillo, ésta ejercerá una presión con la llama, el humo y el hollín. Si luego la retiramos, el platillo bajará".

Se observa, además, que los examinandos, por regla general, analizan durante largo rato las condiciones de no intervención y en los medios a que recurren no pueden distinguir las propiedades esenciales que excluyen su aplicación. La examinando B. N., por ejemplo, (I serie), cierto tiempo después de haber respondido que comprendía bien la condición prohibitiva de actuar sobre la balanza, propone soplar sobre uno de los platillos, desplazar la palanca, poner una tablita en los dos platillos y moverla con mucho cuidado, hacer aire con un libro, etc. Incluso después de una aclaración del experimentador, la joven propuso hacer viento con una tablita, y luego, pese a una segunda aclaración, indicó que se podía colocar la vela debajo de un platillo, encenderla y retirarla después.

Sólo cuando se comprende dicho requisito (no intervención) en forma generalizada se modifica el tipo de recursos de que se echa mano.

El aplicar formas distintas de acción, hace también que el contenido del efecto en lo que se refiere al objeto (alteración del equilibrio) cambie, y se presenta a los examinandos no como oscilación de la balanza, sino como brusco descenso de uno de los platillos hasta el soporte mismo.

Como causa primera de esta caída se señala, en calidad de suposición, la inercia de la balanza. Algunos examinandos analizan también durante largo rato esa causa.

Cabe suponer que ni siquiera explicaciones detalladas del experimentador resultan suficientes para que el examinando comprenda los términos del problema y que necesite, para ello, analizarlos por sí mismo. Este hecho se reveló con singular nitidez en el proceder de algunos examinandos que participaron en la serie complementaria de los experimentos llevados a cabo. A los examinandos se les explicó circunstanciadamente todas las condiciones fundamentales del problema. Así, por ejemplo, el experimentador aclaró que era necesario alcanzar el equilibrio exacto de los platillos de la balanza. Se indicó, asimismo, que por alteración del equilibrio se entendía no la oscilación de los platillos, sino la alteración efectiva del equilibrio: uno de los platillos había de bajar hasta el soporte sin que volviera a levantarse. También se aclaró con todo detalle en qué debía consistir la no intervención: una vez establecido el equilibrio, el examinando no puede hacer nada ni con la balanza, ni junto a ella ni puede actuar sobre ella desde lejos. A pesar de estas detalladas explicaciones y de haber asegurado los examinandos que lo habían comprendido todo, las anotaciones ponen de manifiesto que el curso seguido por éstos en la resolución del problema no se distingue de manera esencial del descrito más arriba.

Por lo visto, las reiteradas infracciones de la condición indicada constituían intentos de analizarla. El examinando tenía que llevar a cabo por sí mismo ese análisis para comprender de qué género son las acciones que se excluyen radicalmente en calidad de causas del efecto dado.

Al llegar al término de la primera etapa se concreta el efecto entendido ahora como señalado descenso de uno de los platillos de la balanza cargados con pesos exactamente iguales. Por consiguiente, se puntualiza también el

carácter general de la causa: el descenso del platillo ha de producirse sin influencia directa ni mediata del sujeto.

En la *segunda etapa* empieza el análisis del efecto, que se convierte en base para utilizar otros recursos. Al cambiar dichos recursos, empiezan a actualizarse y analizarse relaciones más complejas de causa y efecto. Los examinandos empiezan a citar en calidad de causas la presión atmosférica, la fuerza de atracción, la electricidad, el cambio de temperatura. Para conjeturar de qué tipo son las causas que pueden provocar el efecto necesario, los examinandos han de tomar necesariamente en consideración las diferentes propiedades de los objetos sobre los que se actúa, mientras que en la primera etapa, los objetos actuantes y los que sufrían su acción, se veían de manera no diferenciada, sólo como portadores de movimiento mecánico.

En la segunda etapa, los examinandos de la II serie se limitan a la conjetura de colocar bajo el platillo la vela o el corcho encendidos, y no retirarlos: cuando éstos dejen de arder, el platillo, según idea de los examinandos, habría de bajar. En este caso, el platillo y el objeto colocado en él se toman aún de manera por completo indiferenciada y se ven como objetos invariables en sus propiedades.

No obstante, es precisamente esta etapa la que prepara la ejecución del análisis de los objetos que se hallan en la balanza. Después de suponer que la causa del descenso de uno de los platillos es la presión atmosférica, los examinandos se dan cuenta de que dicha causa no puede tener como efecto el descenso de uno de los platillos, pues actúa uniformemente sobre los dos. Por este motivo, los examinandos procuran hallar algunas causas complementarias que hagan posible la acción selectiva de la presión atmosférica, examinada ahora en calidad de efecto sólo en uno de los platillos. Después sigue una breve pausa, que se termina con una alegre exclamación: "¡Los cuerpos se dilatan por efecto del calor!"

A veces, los examinandos proponen enseguida cambiar la temperatura sin idea alguna del resultado de semejante cambio y luego comprueban la dilatación del cuerpo en la balanza. Así, verbigracia, la examinando G. A. habla primero de manera completamente imprecisa acerca de la posible acción de la temperatura, pero al correlacionar el calor con los objetos, concibe la idea que es tomada por ella como solución repentina: "¡Ya está!... Los objetos con el calor se dilatan". Pese a lo erróneo de la solución, la conclusión a que se ha llegado significa que se ha pasado psicológicamente a un estadio más elevado en el análisis de las propiedades de los objetos que figuran en la balanza.

Luego la examinando se pregunta: "¿Pero, el cuerpo se endurece quizá?... ¿En qué condiciones se endurece?" Si pensara que el cuerpo se puede endurecer al secarse, el problema estaría resuelto. Mas primero piensa en el endurecimiento por congelación, que no cambia el peso del objeto. Es interesante el hecho de que, después de dicha conjetura, la examinando por sí misma, en forma generalizada, refleja el objeto de su análisis y la dirección de este último. "Sólo ha de cambiar el peso de lo que hay en uno de los platillos... Esto tiene lugar, por lo visto, en el interior del objeto".

En el curso de los razonamientos ulteriores, la examinando, en esencia, resuelve el problema al suponer que es necesario acelerar de un modo u otro el proceso de evaporación del agua de los grandes tapones de corcho con que se han equilibrado los platillos de la balanza. Cabe señalar que la suposición conducente a la solución del problema no despertó ninguna emoción especial a la examinando. Hemos observado que cuando los examinandos llegan a la solución gradualmente, mediante el sucesivo análisis de las propiedades de los objetos, no experimentan, por regla general, impresiones de sorpresa. De este modo, la resolución va de las representaciones casuales acerca de la acción de tales o cuales fuerzas en un plati-

llo de la balanza, a la idea de que los cambios han de producirse en el interior de los objetos mismos que se encuentran en la balanza y al análisis de las propiedades de los objetos, condicionado por dicha circunstancia.

Como vemos, la conjetura acerca de la acción del calor dio un resultado imprevisto y el reflejo de dicho resultado hizo que la resolución entrara en otra etapa en la cual el efecto se formula ya como cambio de propiedades de los objetos que equilibran los platillos de la balanza, cambio que provoca la modificación de peso. Este cambio de contenido del efecto en lo que respecta al objeto se convierte en causa de la selección de recursos que hacen cambiar las propiedades de los pesos.

De este modo se llega a la *tercera etapa* en la resolución del problema, la del análisis de los objetos que se pesan, actuando sobre ellos por medio de diferentes "instrumentos".

En esta etapa, los examinandos utilizan relaciones de causa y efecto mucho más complejas, en las que un cuerpo transmite a otro formas de movimiento más complicadas, transmite su estado interno, modifica, al establecer una interrelación, la propiedad del cuerpo sobre el que actúa. (En cambio, si el examinando se encuentra en la primera etapa de la resolución del problema, cuando se analizan las relaciones más simples de causa y efecto —transmisión del movimiento mecánico de un cuerpo a otro—, la conjetura de que la alteración del equilibrio depende de los objetos puestos en la balanza, no lleva a la solución del problema). De la segunda etapa se pasa a una etapa superior, la tercera, intentando modificar las condiciones externas de la balanza en equilibrio.

Al buscar los recursos con que modificar los distintos influjos del medio externo (por ejemplo, de la presión atmosférica), se actualizan con facilidad formas más profundas de nexos de causa y efecto, en las que empiezan a incluirse, también, los objetos puestos en la balanza.

Es, precisamente, en esta etapa cuando se manifiesta con más claridad el hecho de que una de las propiedades de la vela queda oculta por otra, pues incluso después de haber establecido cuál es el tipo de objetos que han de ser buscados, los examinandos no utilizan la vela. Para solucionar el problema, les resulta más fácil recurrir a objetos que no figuran en la situación dada (agua, alcohol), que echar mano de la vela, que tienen ante sí. Vemos, pues, que el primer procedimiento que se les ocurre a los examinandos para resolver el problema es el de utilizar sustancias que se evaporan rápidamente. Ello significa que el examinando concibe un nuevo nexo: "evaporación - alteración del equilibrio de la balanza".

Es importante observar que el proceso seguido por los distintos examinandos en la resolución del problema, coincide no sólo en las etapas fundamentales, sino, incluso, en lo que respecta a la utilización de los recursos concretos de acción: presión atmosférica - cambio de temperatura - cambio de las propiedades de los objetos en la balanza. A los propios examinandos, el proceso seguido para resolver el problema se les aparecía, frecuentemente, como una serie de intentos caóticos e inconexos de resolución, pese a que, en realidad, los examinandos seguían el camino habitual.

Quisiéramos subrayar aquí, una vez más, que los examinandos de la II serie, a quienes se daba la lista de los objetos y se les invitaba a que los utilizaran, seguían un proceso de resolución cuyas etapas eran las mismas que las del proceso seguido por los examinandos de la I serie. Enseguida empezaban a analizar las propiedades de los objetos indicados en la lista, pero el que delimitaran tales o cuales propiedades dependía de las relaciones de causa y efecto en que se incluían los objetos examinados y del contenido del efecto en lo referente a los objetos.

Así, la examinando V. P., al encontrarse en la primera etapa de la resolución del problema, consideraba, al principio, todos los objetos incluidos en la lista (la vela,

las cerillas, la tablita, los tapones de corcho, etc.) como medios de tosca acción mecánica sobre la balanza e incluso la llama de la vela se le aparecía como cierto punto de apoyo para los platillos.

Se inicia una nueva etapa —la segunda— en la resolución del problema cuando la examinando propone utilizar el agua para mojar el corcho. En este caso se aplican relaciones más complejas de causa y efecto. Y solamente después de haber actualizado este tipo de relaciones de causa a efecto, la examinando se encontró en condiciones de distinguir en los objetos la propiedad de que el peso disminuye durante la combustión. (Este proceso será investigado más abajo).

Tenemos, pues, que en el objeto se distingue la propiedad, causa posible de un efecto dado, gracias a que el reflejo de dicho objeto empieza a incluirse en el sistema de nexos —formado por la actividad precedente— que es un reflejo de relaciones específicas de causa y efecto.

El ejemplo que a continuación presentamos ilustra muy bien la dependencia en que se encuentra la diferenciación de tal o cual propiedad del objeto respecto a las relaciones de causa y efecto analizadas en el momento dado.

La examinando S. L., que había participado en las experiencias previas, durante largo rato no pudo resolver un problema en que, en lugar de balanza, se utilizaba un listón de madera con movimiento oscilatorio sobre un soporte. La examinando cargaba cuidadosamente los dos extremos del listón de modo que éste balanceara levemente; esperaba, por lo visto, que las oscilaciones se acentuaran y que el equilibrio se alterara. En la siguiente prueba, el experimentador dice a S. L. que su amiga, recién salida del aula de experimentación, había resuelto el problema. Sobre la mesa, junto a la balanza, al lado de la vela que había ardido, había una caja de cerillas y encima de ella una cerilla gastada. Se invita a la examinando a que bus-

que otro procedimiento de resolución. Recorriendo todos los objetos con la mirada y fijándose en la vela, la examinando pregunta: "¿La vela también forma parte de la cuestión?". Después de la respuesta afirmativa del experimentador ("Todo lo que hay aquí forma parte de la cuestión"), la examinando toma la vela, la enciende y la coloca inclinada sobre uno de los extremos del listón, diciendo: "Esto (el listón) oscilará cada vez con más fuerza y luego caerá".

Podría suponerse que la examinando había aplicado en el caso presente la propiedad de la vela de disminuir de peso durante la combustión. Sin embargo, el proceder ulterior de S. L. prueba que semejante conjetura es infundada. Después de varias suposiciones, S. L. dice: "...Y luego puede hacerse así, se puede colocar la vela de modo que ésta gotee no sobre el listón, sino sobre la mesa, y entonces el otro extremo del listón llegará a pesar más". A la pregunta del examinador de por qué había de dar vuelta al listón cuando la vela goteaba encima de él, la examinando responde: "Porque las gotas, al golpear constantemente sobre la regla, la hacen oscilar, ...mientras que aquí la regla simplemente perderá peso".

La combustión de la vela, por tanto, presenta varios efectos, y el que los examinandos elijan uno u otro depende del nexo de causa y efecto en que la vela se incluya.

Vemos, pues, que el camino recorrido para la resolución del problema pasa por varias etapas. Cada etapa tiene como contenido el análisis de nexos y relaciones de causa y efecto cada vez más profundos.

En cada etapa se concreta y puntualiza cada vez más el efecto y, correspondientemente, la causa. Además, en el proceso de la resolución, la causa y el efecto cambian ininterrumpidamente entre sí de lugar, de modo que el proceso gracias al que se descubre el nexo buscado de causa y efecto, se lleva a cabo mediante la reiterada colocación de la causa próxima en lugar de su efecto, y del

efecto próximo en lugar de su causa. Tal sustitución se efectúa, a su vez, como resultado de diferenciar objetos que figuran en calidad de uno de los miembros del nexo de causa y efecto, en nuevas cualidades, donde los objetos aludidos desempeñan el papel de causa o de efecto. El análisis a través de la síntesis, el poner de manifiesto nuevas propiedades de los objetos incluyéndolos en nuevas conexiones, constituye en el caso presente, lo mismo que en términos generales, el "mecanismo" básico de la actividad mental.

Como hemos indicado ya en el primer apartado, el hecho de que se pongan de manifiesto propiedades veladas de los objetos, llamó la atención de los investigadores hace ya mucho tiempo. Sin embargo, las investigaciones realizadas en general no pretendían caracterizar el contenido del problema en lo referente a los objetos, especificar los nexos en que está incluida la propiedad buscada ni ver de qué modo dichos nexos determinan el proceso de la resolución. Así se explica que el análisis de las anotaciones no proporcionara un cuadro real del contenido que posee el proceso de la resolución.

Es muy significativo, en este aspecto, el trabajo de Székely a que nos hemos referido más arriba y en el que se aplicó una metodología análoga a la nuestra. Al analizar las anotaciones, Székely observó muy acertadamente que el proceso de resolución pasa por varias fases, que cada nueva fase caracteriza un nuevo problema y que el centro de gravedad de este último se desplaza sin cesar. Sin embargo, Székely no puede responder a varias cuestiones, como son la de cuál es el contenido del proceso todo de la resolución, qué determina la sucesión de las fases, cuál es el contenido de cada fase. El autor no ve que en la base del problema se encuentran relaciones de causa y efecto entre los objetos, no intenta siquiera examinar cuál es el lugar que ocupa, en la estructura de las relaciones dadas en el problema, la propiedad buscada, ni

intenta analizar qué carácter tiene la relación que une los términos dados del problema y lo que en él se busca.

A pesar de que Székely se plantea como fin de su investigación el de responder a la pregunta de cómo se produce la delimitación de la propiedad necesaria, no puede responder a ella. A juicio de Székely, después de numerosas pruebas infructuosas, el pensamiento se hace inconsciente y es, precisamente, en dicho período cuando aflora la encubierta propiedad de la vela. Para resolver el problema, el pensamiento, cree Székely, ha de apartarse del mundo racional y ha de aproximarse al mundo de la fantasía y del juego, es decir, ha de "dirigirse a la capa irreal". "En consonancia con ello —escribe Székely— es necesario decir que el tipo de reestructuración dado en la base de la resolución del problema sobre el equilibrio, pertenece, hablando en propiedad, al arsenal de mecanismos de lo inconsciente y preconsciente"(2).

Nuestros datos revelan que semejante afirmación de Székely carece por completo de fundamento. Incluso cuando, desde el punto de vista externo, nuestros examinandos llegaron a la solución del problema de manera como totalmente repentina, un interrogatorio complementario permitió descubrir la existencia de etapas intermedias. Una de nuestras examinandos, que resolvía el problema utilizando la lista de objetos, después de 40 minutos de trabajo declaró que era insoluble, que "los platillos perderán el equilibrio cuando se rompa la balanza o de ella caiga alguna cosa... una cerilla". Luego, la examinando guardó silencio durante 4 minutos y, de súbito, su actitud cambió radicalmente. Mirando muy animada al experimentador, dijo: "¿Y si antes de colocar la vela se enciende?... (ríe nerviosamente), ¡Oh, qué divertido!... Se enciende antes de equilibrar la balanza (continúa riendo y se ruboriza)... y se quema... Y el equilibrio se altera... ¡y no sé nada más! (arroja el papel sobre la mesa)".

---

(2) *L. Székeley*, obra citada, pág. 93.

A la pregunta del experimentador acerca de cómo había llegado a idear dicha solución, la examinando responde: "He pensado que se necesita algo que se evapore, pero veo que no hay nada evaporable. Entonces me he puesto a mirar qué es lo que hay. Veo que hay una vela, se puede encender".

Es, pues, evidente que la examinando resolvió el problema siguiendo el camino habitual, sin sumirse en lo más mínimo en la "capa irreal", pero no enunció en voz alta lo que pensaba. Esto no significa, desde luego, que los examinandos puedan enunciar en voz alta, si así lo desean, todo el curso de su pensamiento. Con mucha frecuencia, grandes eslabones del proceso mental se dan en forma de imagen, de representación o de movimientos subconscientes. Pero es posible restablecer el contenido de dichos eslabones, no manifestados exteriormente, conociendo el curso general de la resolución gracias a una anotación detallada y viendo la coincidencia de los eslabones anteriores y posteriores. Desde luego, la simple referencia a que el proceso pasa a la esfera de los cuentos y de la fantasía, no aclara nada.

El proceso de la resolución del problema se presenta como análisis de las diferentes propiedades del objeto que se van descubriendo en nexos de causa y efecto cada vez más profundos. El análisis de los objetos como medios de la resolución se lleva a cabo a través de un acto de síntesis con que se relacionan las propiedades diferenciadas de los objetos y lo que en el problema se pide, materia, a su vez de análisis y puntualización incesantes. Si queda sin analizar lo que en el problema se pide, ni la indicación de que la solución depende de los objetos que se pueden pesar ni siquiera la obtención experimental, por parte del examinando, de la propiedad necesaria, bastan para que ésta se use con vistas a la correspondiente resolución. Así se ha puesto nítidamente de manifiesto en el transcurso de nuestros experimentos, en los cuales hemos echado mano de algunos recursos para hacer avanzar el análisis

del problema y hemos aclarado las condiciones en que los examinandos aprovechan la ayuda del experimentador.

Así, por ejemplo, teniendo en cuenta que los examinandos por lo común no resuelven el problema con ayuda de los objetos dados y se remiten al uso de un líquido y de una sustancia que se evapore rápidamente, el experimentador indicó que para equilibrar la balanza se podían utilizar los objetos que se quisiera y añadió que esto ayuda a resolver el problema. Pero semejante progreso del análisis debido al mismo experimentador, sólo fue aprovechado por los examinandos que ya habían llegado por sí mismos al análisis de las propiedades de los objetos en la balanza y, por ende, habían ya diferenciado los objetos de los platillos como componentes esenciales del problema. A la examinando B. N., por ejemplo, se le proporcionó esa ayuda después de que ella había propuesto utilizar la presión atmosférica y el calentamiento, o sea, recursos el último de los cuales permite cambiar la propiedad de los platillos y de los objetos en ellos colocados. De ahí que las palabras del experimentador: "¿y si le invitaran a utilizar los objetos que quisiera?", provocaran en la examinando, después de un segundo de perplejidad, una rápida respuesta, a saber: "...depende de cómo se razone... Podemos colocar algo mojado, equilibrar la balanza y luego, pasado cierto tiempo, eso se secará".

La propuesta de que se utilizaran los objetos que se quisiera no condujo a la solución a los examinandos que con anterioridad aún no habían analizado, en el fondo, el problema. Dichos examinandos no veían más que una propiedad en los objetos dados: la del peso. Así se explica que la propuesta del experimentador en el sentido de que podían utilizar cualquier objeto para poner en equilibrio la balanza y la pregunta de si esta indicación les ayudaba a resolver el problema, sólo despertaran en ellos sorpresa. "Para equilibrar la balanza, me bastan estos objetos. Pero, ¿cómo saldrá la balanza del estado de equilibrio?", dice perpleja la examinando D. A.

La examinando B. G., a la proposición análoga del experimentador, responde: "pero la cosa no depende de los objetos".

En el transcurso de los experimentos, aplicamos también el recurso siguiente para hacer avanzar el análisis del problema. Un asistente encendía una vela con el pretexto de iluminar un ángulo oscuro del aposento. Transcurrido cierto tiempo, la vela se devolvía al examinando mientras el experimentador se lamentaba en voz alta de que la vela se hubiera hecho más pequeña. Este recurso se introdujo también en el experimento cuando el problema aún no había sido analizado por el mismo examinando. Como se refleja en las anotaciones, ninguno de nuestros examinandos aprovechó esta forma de ayuda pese a que algunos de ellos habían comenzado a hablar de la disminución de tamaño y hasta de peso de la vela después de haberla encendido. F. Z., por ejemplo, en respuesta a la exclamación del experimentador: "¡nos han gastado la vela!", dice, mirándola: "bueno, no es mucho", y después de las palabras del experimentador: "sí, se ha hecho un poco menor", prosigue equilibrando, como antes, la balanza con distintos objetos.

La examinando T. L., a la exclamación del experimentador: "¡Oh, me han gastado la mitad de la vela!", responde en tono admonitivo: "no tenía que haberla dado... Seguramente tiene usted todos los objetos pesados con exactitud, y ahora... No hay que hacer estas cosas...". De este modo, T. L. correlacionó directamente el cambio de tamaño de la vela con el cambio de su peso, pero ello no influyó para nada en el curso de la resolución del problema. Mientras el efecto se concretaba exclusivamente en forma de oscilación de los platillos de la balanza, la resolución del problema no avanzaba...

Después de que se hubo apagado la vela y se hubo colocado cerca de la balanza, entre el experimentador y la examinando tuvo lugar la siguiente conversación: *Exper.:* "Vamos a ver si han gastado mucha vela... Si

se ha vuelto más ligera, puede gastarse tanto...". *Suj.* (riendo, interrumpe al experimentador): "...que se volverá completamente ligera". Después de esto, la examinando coloca la vela en la balanza, pone las cerillas al lado y empieza a equilibrar los platillos con tapones de corcho y tablitas, pasando los objetos de un platillo a otro, suspirando y observando, de vez en cuando, que "los platillos no bajan de ningún modo, sólo dan sacudidas". Al final de la prueba deja caer los brazos, sin esperanza, declarando: "No sé qué hacer con los platillos".

En la siguiente prueba, empezó de nuevo a poner en equilibrio los objetos dados, pero al no obtener un equilibrio exacto entre los platillos de la balanza, comenzó a razonar: "supongamos que están en equilibrio... Esto significa que los pesos en los platillos son iguales...". Mirando atentamente la caja de cerillas que ella misma había colocado en la balanza al principio, prosiguió: "Es una pena que la cajita misma no salte, disminuiría". Poco después halla la solución del problema. Al término de una breve pausa, la examinando dice, de pronto: "Pero tenemos cerillas... y una vela, se puede encender". A la pregunta del experimentador acerca de cómo había encontrado este procedimiento de resolución, la examinando respondió: "Usted ha preguntado si no disminuía la vela... Tengo cerillas... esto es lo que me ha sugerido la idea...".

Obsérvese que la examinando recordó la sugerencia del experimentador sólo cuando empezó a examinar el objeto en la balanza como posible causa de la alteración del equilibrio, es decir, cuando concretó el efecto en la forma necesaria. Mientras los objetos en la balanza no pasaban de ser elementos que servían de fondo a aquél, la sugerencia no influyó para nada en el proceso de la resolución.

* * *

A los examinandos que resolvieron el problema recurriendo a una sustancia volátil, les propusimos que buscaran la solución utilizando los objetos reales o la lista de objetos, entre los que figuraba la vela. El análisis de semejante transferencia de la resolución a nuevas condiciones, muestra que la transferencia de este tipo constituye un análisis —por parte del examinando— de los objetos dados desde el punto de vista del primer procedimiento de resolución, una comparación constante entre la situación presente y la anterior. En el proceso de esta "transferencia", los examinandos intentan no ya diferenciar, sino, además, crear en los objetos dados las mismas cualidades de los objetos propuestos por ellos anteriormente.

El examinando F. V., por ejemplo, propone calentar con una estufa el aire del aposento para que el agua se evapore más rápidamente de los objetos que le eran dados. Cuando el experimentador le indica que en el aposento no hay ninguna estufa y que tampoco figura en las condiciones del problema, el examinando contesta sorprendido: "Pero estos objetos no pueden secarse o evaporarse en unos segundos". Examina todos los objetos, se detiene en el corcho y reflexiona: "No sé, no puede secarse. Encima tiene lacre, si se funde, el corcho quedará más ligero... Me parece que las velas tampoco se secan". Abstrayéndose de los objetos que le son dados, presupone que en los platillos de la balanza se sedimenta polvo o cambia la presión del aire. De nuevo empieza a examinar todos los objetos y se pregunta: "¿Qué se puede hacer con estos objetos? ¿Qué puede cambiar, en ellos? Si mojamos...". Se pone a comparar los tapones con las tablitas: "En los corchos hay más poros que en las tablitas y en los corchos penetra más aire, serán más pesados". Finalmente, al examinar la vela, F. V. propone encenderla y explica: "Aquí tenemos una vela, ha sido encendida".

Vemos que el paso de una resolución a la otra empieza con la tentativa de aplicar directamente la resolu-

ción anterior a un nuevo material, con la tentativa ora de discernir en los objetos dados las mismas propiedades diferenciadas anteriormente en otros objetos ora de crear, incluso, tales propiedades (mojar los corchos, las tablitas).

El fracaso de esas tentativas hace que los examinandos se fijen en otras propiedades de los objetos. Se lleva a cabo un análisis gradual, cada vez más profundo, de dichas propiedades, el cual lleva, finalmente, a distinguir la propiedad necesaria para la resolución.

El examinando B. T., pasando la vista por los objetos dados, reflexiona y dice: "De las tablitas puede evaporarse el agua". Mira la vela y añade: "Pero la vela por sí misma no podría volatilizarse de ningún modo". A la pregunta del experimentador: "¿De ningún modo?", B. T. responde, vacilando: "Bueno, si se encendiera... En este caso se fundiría rápidamente... Pero el peso seguiría siendo el mismo". Sólo después de unos momentos de meditación exclama: "¡Ya está! Encendemos la vela, ésta se gasta y todo se altera".

Cuando el paso de un procedimiento a otro es rápido cabe suponer que conserva los rasgos característicos arriba indicados, sólo que, debido a su rapidez, ello no se traduce en las palabras de los examinandos y es posible que éstos no lleguen siquiera a darse cuenta de cómo se produce tal paso.

Así, la examinando M., a la invitación de que resolviera el problema utilizando los objetos dados, declara al principio, sorprendida: "Con estas tablitas no se puede hacer nada". Sin embargo, luego dice rápidamente: "A no ser que las cerillas... encender la vela... Ésta es, probablemente, la solución". M. explica la aparición de esta idea del siguiente modo: "...Si hay evaporación, es evidente que el peso disminuye. Luego he interrumpido este pensamiento y todas las ideas me han desaparecido de la cabeza. Después he mirado las cerillas y la vela usada y momentáneamente se me ha ocurrido que era posible encenderlas".

El examinando V. E., a la invitación del experimentador de que resolviera el problema prácticamente, propone: "Se puede tomar alcohol y encenderlo". Es curioso que, así, el examinando después de utilizar la combustión como procedimiento para cambiar el peso de la substancia, no pudiera ver en la vela la propiedad que necesitaba. Sólo cuando el experimentador le hubo indicado que entre los objetos dados no había alcohol, el examinando, después de mirar atentamente todos los objetos, propuso encender la vela.

De modo análogo, el examinando K. N., después de las palabras del experimentador ("¿Cómo resolver el problema utilizando estos objetos que tiene a su disposición?") mira primero atentamente todos los objetos y, suspirando con amargura, dice: "Se podría poner papel, pero no lo tenemos". A la pregunta del experimentador de para qué le hace falta el papel, K. N. aclara: "Uno grande y otro pequeño... se podrían encender", y después de una brevísima pausa, añade: "Hasta se puede encender la vela".

Los casos citados presentan aún con mayor relieve el hecho de que la propiedad de la vela consistente en la disminución del peso, esencial en el caso presente, se da encubierta. En cambio, a diferencia de lo que ocurre con la vela, la disminución de peso si se quema papel o alcohol, no queda encubierta por nada, lo cual facilita la utilización de dichas substancias.

Es muy difícil aclarar con exactitud por qué es tan lento el paso de un procedimiento de resolución a otro, si partimos sólo del análisis de las anotaciones de que disponemos, sin realizar experimentos complementarios. Al principio suponíamos que los examinandos, si resolvían al momento el problema, si discernían enseguida el componente esencial del efecto, podrían pasar rápidamente a la resolución utilizando los objetos dados. Sin embargo, esta conjetura no se confirmó. La examinando F. V., que resolvió en un momento el problema proponiendo que se

utilizaran cerillas mojadas, sólo con extraordinaria lentitud halló el otro procedimiento de resolución. El proceso de la transferencia incluía en ella no sólo las tentativas de analizar desde el punto de vista de la primera solución las propiedades de los objetos dados, sino, además, las tentativas de analizar las condiciones del problema. F. V., examina la balanza y empieza a mover la palanca que hace subir y bajar el brazo que sostiene los platillos y dice: "Estaría bien si fuera así". Poco después propone colocar la balanza en un espacio sin aire y luego sacarla. En el fondo, todas estas proposiciones son un análisis de la condición que prohibe intervenir para alterar el equilibrio de los platillos, o dicho de otro modo, son un análisis de causas, no llevado a cabo antes por la examinando.

Resulta, pues, que en el presente caso, uno de los motivos de la lentitud de la transferencia radica en no haber efectuado un análisis suficiente de las relaciones de causa y efecto que ligan los términos del problema a l(que en él se pide. De todos modos, si bien los datos d(que disponemos no nos permiten descubrir plenamente las causas que dificultan el paso rápido de un procedimiento de resolución a otro, muestran de manera diáfana y convincente cómo es el proceso mismo de este paso. Y el problema de esta transferencia consiste, aquí, en el de aplicar el principio de la solución a nuevas condiciones, dado que el segundo procedimiento de resolución se basa en el mismo principio que el primero.

* * *

En el análisis que acabamos de exponer acerca del proceso en virtud del cual se determina la causa desconocida de un efecto dado, se señalan tan sólo las etapas fundamentales de la resolución, sus momentos cruciales, pero no se examinan, naturalmente, todos los eslabones del movimiento del pensar. Descubrir el proceso del pensamiento al pasar de un objeto a otro, de una propiedad del

objeto a otra propiedad constituye una tarea interesantísima de la ulterior investigación. Pese a que la metodología de la presente no responde al propósito de efectuar un microanálisis del proceso en virtud del cual se resuelve el problema, el material de que disponemos nos permite, sin embargo, poner de relieve algunas formas del paso mental de un objeto a otro.

Ante todo hemos delimitado la forma de la transferencia que lleva a la solución del problema. Esta transferencia consiste en lo siguiente: Los examinandos formulaban una hipótesis respecto a la causa del efecto dado. Luego empezaban a buscar recursos para actuar sobre dicha causa, vista ya como efecto, y, así, poderla dirigir. Los recursos indicados desempeñan en este momento el papel de causa, mientras que la causa primera pasa a desempeñar el papel de efecto. Sin embargo, este segundo efecto incluye en sí, de manera generalizada, el efecto primero, a consecuencia de lo cual los examinandos actualizaban rápidamente los dos resultados obtenidos con el recurso por ellos examinado. Uno de esos resultados constituía la causa concreta del efecto dado, causa formulada de manera general (por ejemplo, que los objetos en determinadas condiciones modifican sus cualidades) o bien, enseguida, de manera diferenciada. Por ejemplo, una de las examinandos buscaba primero un metal que pudiera dilatarse fácilmente bajo la acción del calor y citó el mercurio, pero al instante indicó que el mercurio, bajo la acción de los rayos solares, se evapora. De nuevo nos encontramos, en este caso, con la actualización de un saber acerca del segundo efecto de una misma causa.

El análisis de las anotaciones permite aún delimitar otras dos formas del paso mental de un objeto a otro o de la introducción de nuevas propiedades en la esfera del pensar. Esas formas no llevaron directamente a la solución del problema. Una de ellas consiste en que el sujeto conserva cierto principio, pero lo aplica a otro material concreto. Por ejemplo, el examinando S. G., después de

proponer que se calentara el aire junto a uno de los platillos para que la presión disminuya, presupone que el calor pasará luego al otro platillo y que se alterará el equilibrio. A la observación del experimentador en el sentido de que el calor se esparcía por toda la habitación, S. G. propone cerrar herméticamente el espacio junto a uno de los platillos.

Después de que el experimentador hubo rechazado este procedimiento, el examinando propuso: "Entonces, pueden colocarse dos probetas según el principio de los vasos comunicantes. Echaremos un poco de agua en la probeta del platillo que esté más alto; el tubo será muy fino y el agua tardará unos diez segundos en pasar a la otra probeta". De este modo, el examinando conserva el principio de que algo pasa de un platillo a otro, pero no se convence de que este algo sea el calor en cuanto estado transferible de la materia. Lo que ha de desplazarse ha de ser algo más tangible, cuyo paso resulte más fácil de interrumpir. En consonancia con las cualidades requeridas, se elige el objeto. De este modo, la aplicación del principio en otro material concreto se complica siempre por el proceso de reconstrucción del objeto que posea las cualidades requeridas o, con más exactitud, por el proceso en virtud del cual se encuentra un determinado objeto según la propiedad necesaria.

La otra forma de paso mental que tampoco lleva a la solución del problema consiste en el examen mental de un objeto, según sus distintas facetas. Así, la examinando G. A., en una etapa determinada de la resolución, expuso la idea de que la luz podría ejercer alguna influencia sobre la balanza: "¿Quizá la luz? La balanza se mantendrá en equilibrio, pero cuando oscurezca, se desequilibrará". Aquí la luz se toma de manera totalmente indiferenciada, pero más adelante G. A. se refiere a un tipo especial de rayos luminosos, los solares, destacando en ellos *no* ya la propiedad de dar luz, sino la de dar calor: "¿Quizá la temperatura? Cuando es de día, los rayos solares calientan el aire".

De este modo vemos que cada paso en la resolución constituye una delimitación de objetos en nuevas cualidades, su examen desde facetas siempre nuevas. Lo que constituye la trayectoria del movimiento del pensar son las propiedades y relaciones nuevas de los objetos, propiedades y relaciones nuevas que van apareciendo sucesivamente en el "foco de la atención" y que resaltan gracias a que los objetos se incluyen en nuevos lazos de causa y efecto.

A. M. MATIUSHKIN

ANALISIS Y GENERALIZACION DE RELACIONES

El objetivo de nuestro trabajo consistió en investigar la dependencia en que se encuentra la generalización de relaciones respecto al proceso del análisis.

Se tomaron como material de investigación los sistemas numéricos de posición.

Se llama sistema numérico al conjunto de una pequeña cantidad de nombres y signos que permiten designar cualquier guarismo. En los sistemas de posición, para denominar el número no sólo importa la cifra de por sí; es, además, importante el lugar que ésta ocupa en el número (posición). La posición de la cifra en el número señala el contenido de la unidad de orden, mientras que la cifra viene a ser como su coeficiente. Si falta un determinado orden se pone "0". La estructura del número en el sistema numérico de posición se asienta sobre una ley que incluye varias relaciones. Si expresamos dichas relaciones mediante una fórmula, cualquier número de cualquier sistema de posición, puede ser representado como sigue:

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n}\ (k) = a \cdot k^{n-1} + b \cdot k^{n-2} + \ldots + c \cdot k + d.$$

donde a, b, c, d son unas cifras cualesquiera del número; k es la base del sistema numérico y n la cantidad de cifras del número. Tenemos, pues, que en el sistema numérico de posición, la ley de la estructura del número incluye en sí la relación entre la base del sistema y el lugar de la cifra en el número, relación que se expresa en la fórmula por la dependencia entre k y n (principio multiplicativo

en la formación de los órdenes del número) y la relación que constituye el modo de formar los órdenes por medio de la suma (principio aditivo). La ley fundamental de la estructura del número en el sistema numérico de posición es el principio en virtud del cual se forman las unidades de los órdenes. La base del sistema numérico multiplicada por la unidad del orden constituye la unidad del orden subsiguiente, superior.

Todo individuo que haya pasado por la escuela conoce el sistema numérico decimal de posición, aceptado actualmente en la mayor parte de los países. La base del sistema numérico decimal, expresada en la unidad del segundo orden, es el número 10. Cualquier número de dicho sistema puede expresarse del siguiente modo:

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n}(10) = a \cdot 10^{n-1} + b \cdot 10^{n-2} + \ldots + c \cdot 10 + d$$

(por ejemplo, $4325 = 4 \cdot 10^{4-1} + 3 \cdot 10^{4-2} + 2 \cdot 10^{4-3} + 5$). Para designar un número cualquiera en el sistema decimal se necesitan diez signos o cifras (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0).

Los otros sistemas numéricos de posición se diferencian del decimal por su base (la unidad del segundo orden) y por la cantidad de cifras necesarias para designar un número. Si tomamos el sistema numérico de base cinco, cualquier número de dicho sistema puede expresarse del modo siguiente:

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n}(5) = a \cdot 5^{n-1} + b \cdot 5^{n-2} + \ldots + c \cdot 5 + d$$

(por ejemplo, $3214 = 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4$). Para designar un número cualquiera en el sistema de base cinco, bastan cinco cifras.

Tenemos, pues, que en la base de la estructura del número en cualquier sistema numérico de posición figura

una misma ley, que constituye el principio de posición. Ello nos ha permitido utilizar los sistemas numéricos de posición como material para investigar el proceso en virtud del cual la generalización se forma.

En la escuela media, no se estudia más sistema numérico de posición que el decimal, de modo que pudimos utilizar en los experimentos los otros sistemas como material *nuevo*. De este modo soslayamos una dificultad que suele presentarse en la investigación del proceso del pensar: las estructuraciones, los sistemas artificiales creados especialmente para el experimento.

Por su carácter, los experimentos constituían la resolución sucesiva —por parte del examinando— de un sistema de problemas en los que es necesario obtener relaciones que constituyen una ley y efectuar las correspondientes operaciones, basadas en las relaciones indicadas, para designar un número.

Se llevaron a cabo tres series de experimentos.

En la primera serie se pedía al examinando que hallara en primer lugar la fórmula del número en el sistema decimal. Después, el examinando debía designar los números en el sistema numérico de base cinco. El segundo problema servía de comprobación y permitía ver el carácter de la generalización alcanzada por el examinando. Ahora bien, en los casos en que el examinando no podía cumplir enseguida la segunda tarea, se utilizaba ésta como proceso de generalización y en calidad de problema de control se utilizaba entonces el de designar el número en otros sistemas numéricos no decimales.

En la segunda serie de experimentos, lo primero que se requería del examinando era designar los números en un nuevo sistema numérico (de base cinco); como quiera que el examinando no podía hacerlo, se le pedía que buscara la fórmula del número en el sistema decimal para que, sobre esta base, designara los números en el otro sistema.

También servía de problema de control, en este caso, el designar los números según otros sistemas numéricos de posición.

En la tercera serie de experimentos, se pedía del examinando no sólo hallar la fórmula del número en el sistema decimal (como en la primera serie) sino, además, fundamentar las relaciones puestas de relieve en la fórmula. El problema de control seguía siendo el mismo.

De este modo, en las series indicadas de experimentos, se modificaban las condiciones y vías del proceso de análisis que lleva a la generalización, lo cual modificaba también, naturalmente, el carácter del proceso mismo de la generalización.

Para designar los números de los sistemas numéricos no decimales, se utilizaron en los experimentos cifras y denominaciones tomadas del sistema decimal. Los examinandos eran alumnos de escuelas superiores y licenciados que no habían seguido cursos especiales sobre la teoría del número y que no conocían más sistema numérico que el decimal.

Participaron en los experimentos 45 personas (15 en cada serie).

* * *

En experimentos preliminares se pedía a los examinandos que designaran un guarismo en el sistema numérico de base cinco utilizando cinco cifras (1, 2, 3, 4, 0). Todos los sujetos sabían designar los números en el sistema de base diez. Pese a ello, ni uno solo de los examinandos pudo resolver el problema planteado, es decir, utilizar el procedimiento general —de todos conocido— para estructurar el número en nuevas condiciones, cuando se cambia la base del sistema. La resolución del problema exigió de los examinandos un largo y complejo proceso de análisis de las nuevas condiciones de designación, gracial al cual se descubría la regularidad de la estructura del número en el sistema numérico de base cinco.

Se formuló la hipótesis de que el examinando no puede utilizar en las nuevas condiciones el procedimiento de designación que le es conocido, debido a que en el proceso de análisis no ha alcanzado el necesario nivel de generalización de las relaciones que figuran en la base del nuevo procedimiento de designación requerido. Para comprobar esta hipótesis se llevó a cabo la I serie de experimentos.

Generalización de relaciones partiendo de la obtención previa de la fórmula del número en el sistema decimal

En la I serie de experimentos se pedía ante todo del examinando que hallara la fórmula de cualquier número en el sistema decimal.

En la resolución de este problema (que incluía una serie de problemas particulares) el examinando descubría las relaciones que constituyen la ley de la estructura del número en el sistema decimal e incluían el principio de dicha estructura en cualquier sistema numérico de posición.

Después, se pedía al examinando que designara los números en el sistema numérico de base cinco, o sea, utilizando cinco cifras (1, 2, 3, 4, 0).

El nuevo problema exigía del sujeto la aplicación de la regularidad establecida por él mismo al analizar el sistema decimal y expresada en la fórmula de cualquier número de dicho sistema.

Podía esperarse que el examinando utilizara en las nuevas condiciones la regularidad de la estructura del número.

Veamos una anotación típica de los experimentos.

3/I/1957. *Anotación. Nº 30*

Exp.: En la escuela ha estudiado usted el sistema de numeración decimal. Vamos a comprobar ahora si lo conoce bien.
Escriba el número 1 233 489.
Suj.: (Escribe).

Exp.: Muy bien. Escriba la fórmula del número $\underbrace{11\ \ldots\ 11}_{n}$, es decir, de un número expresado mediante unidades, en el que n designa cualquier cantidad de ellas.

Suj.: No puedo comprender cómo se puede escribir semejante fórmula. ¿No se trata de la suma de n unidades?... O bien, si se toma la unidad n veces, entonces tenemos otra vez sólo una suma de unidades... Nada, no se obtiene nada. Si resuelvo de este modo los problemas, no obtendré ningún resultado. ¿Quizá sería mejor no empezar?

Exp.: Hallemos primero la fórmula para el número $\underbrace{100\ \ldots\ 0}_{m}$, en el que m designa una cantidad cualquiera de ceros.

Suj.: Esto no es más fácil. La dificultad está en que puede haber *cualquier* número de ceros.

Exp.: Resuelva este problema suponiendo que $m = 5$.

Suj.: Son, pues, cinco ceros. Tenemos 100.000. ¡Ah, bien! 10, 100... Eso es... Cuando añado un cero, el número aumenta en 10 veces. En este caso tendremos 10^5, y $\underbrace{100\ \ldots\ 00}_{m} = 10^m$. Pero con las unidades no cabe esta solución. Tomemos 11, 111, 1111... ¿Qué serie se observa en este caso? No veo ninguna. ¿Cómo hay que proceder?

Exp.: Supongamos que $n = 5$. Escriba a qué es igual cada unidad en este número.

Suj.: $11111 = 10\,000 + 1\,000 + 100 + 10 + 1$... Ahora ya resulta sencillo. $\underbrace{11\ \ldots\ 11}_{n} = 1^n = 1^{n-1}$... No, tampoco resulta bien. Está claro, en este caso hay que partir de 10 y no de la unidad... $10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + 10 + 1$. Pero esto es así para el número dado. ¿Cómo será para cualquier número? Aquí hay un error: $n = 5$, mientras que sólo tenemos cuatro ceros... $10^{n-1} + 10^{n-2}$... Para cualquier número hay que poner puntos, pues el exponente del grado irá disminuyendo sin cesar. $10^{n-1} + 10^{n-2} \ldots + 10 + 1$.

Exp.: Ahora escriba la fórmula para cualquier número del sistema decimal: $\underbrace{ab\ \ldots\ cd}_{n}$, donde a, b, c, d son no importa qué cifras y n indica una cantidad cualquiera de ellas.

Suj.: Supongamos que $n = 4$. Entonces tendremos $a000 + b00 + c0 + d$, o sea que $\underbrace{ab \ldots cd}_{n} = a \cdot 10^{n-1} + b \cdot 10^{n-2} + \ldots c \cdot 10 + d$.

Exp.: Compruebe la fórmula.

Suj.: $n = 5$; $a = 7$; $b = 4$; $c = 8$; $d = 3$; $l = 2$.

$70000 + 4000 + 800 + 30 + 2 = 7 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 = 74832$.

Exp.: Ahora vamos a resolver otro ejercicio. Además del sistema de numeración decimal, existen otros sistemas no decimales. Tendremos que escribir números en el sistema numérico de base cinco. En este sistema, para designar un número, cualquiera que sea, bastan cinco cifras: 1, 2, 3, 4, 0... Escriba el número 17.

Suj.: ¿Se puede sumar o multiplicar?

Exp.: No, no pueden utilizarse los signos de las operaciones aritméticas.

Suj.: Aquí ha de haber algún sistema, algún principio. Si escribo, como en el sistema decimal, un uno y un dos (12), ¿será esto doce?

Exp.: No, no será doce.

Suj.: ¿Por qué se da en este sistema el cero? De todos modos, 4 y 0 no serán cuarenta. El cero, en el sistema decimal, señala el lugar de una cifra, mas, ¿para qué nos sirve, en este otro caso? No se puede sumar ni restar, ¿qué hacer, pues? Así tenemos cifras aisladas no sujetas a ningún sistema.

Exp.: Empezar escribiendo 17 es difícil. Escriba 5.

Suj.: Si encuentro el cinco, ya conoceré el sistema; entonces todo es coser y cantar. Es probable que la combinación de dos cifras designe algo. ¿Quizá las cifras se repiten? Aquí, cuando las cifras se acaban, ha de empezar el segundo orden: 1, 2, 3, 4, 0; 1, 2, 3, 4, 0. Éste es el segundo orden. Veamos cómo se designa la segunda unidad en el sistema decimal. En este sistema, la unidad y el cero son 10. En el otro sistema, la unidad y el cero serán 5. ¿Cómo proseguir? No hay manera de guiarse por el sistema decimal. Si en el primer lugar tenemos la unidad y en el segundo el dos, entonces... No, si se trata del 2 nada más, con el cero ha de dar 6 ... Nunca he oído hablar del sistema de base cinco. Aunque, en realidad, tampoco he estudiado nunca el sistema decimal ni pensado en él... Cuando escribo 1, tengo 1. Cuando escribo un uno y un cero, tengo 10. En el sistema de base cinco, cuando escribo 1 tengo 1; cuando escribo el uno con el cero, tengo 5. En el sistema decimal, dos unidades forman el número once. En el otro sistema, formarán el número 6. Así tenemos: $12 = 7$, $13 = 8$, $14 = 9$... No dispongo de más cifras. Esto significa que para seguir es necesario poner un cero...

100 = 10. No, si 14 = 9... escribamos, como en el sistema decimal: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. No hay más cifras y pasamos al 20...; 10 equivale a 20. Nada más. Según el sistema decimal escribo en el de base cinco: 21 = 11; 22 = 12; 23 = 13; 24 = 14; 25 = 15... No, el 5 no existe; resulta, pues, que 30 = 15; 31 = 16; 32 = 17.

Exp.: Escriba 38.

Suj.: Es necesario hallar un sistema. Usted puede mandarme escribir un número grande cualquiera... 5 = 10; 10 = 20: es dos veces mayor. Pero 24 = 14; 32 = 17... No, todavía no sé cuál es el sistema... Tomemos el 17: son tres cincos y un dos = 32; 38 son siete cincos y un tres = 73.

Exp.: ¿Acaso se da la cifra 7?

Suj.: ¡Ah, no!... ¿Qué hacer, pues? Pero 7 equivale a 12; entonces 38 será 123.

Exp.: Escriba 149.

Suj.: De todos modos, el 38 es un mal número. ¿Dónde está la madre del cordero? 100 son 20 cincos; 40 son ocho cincos; 9 es un cinco y un cuatro. ¿Qué más? Hay que escribir los números uno tras otro, aunque sólo sea la primera centena. ¿Cuánto será en el sistema de base cinco el número, digamos, 21.314? Esto también es un problema. En realidad lo que hace falta es pasar de un sistema a otro. De nuevo es necesaria la fórmula. Sin la fórmula no hay modo de hacer nada... Veamos de todos modos cuánto resulta... (El examinando construye luego la serie numérica de base cinco, escribiendo debajo de cada número su valor en el sistema decimal).

1 2 3 4 10 11 12 13 14 20 21 22 23 24 30 31 32 33
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
34 35
19 20

No, no es cierto que "35 sea 20", pues el 5 no figura... (sigue construyendo la serie numérica)

40 41 42 43 44 45
20 21 22 23 24 25

Otra vez sobra el 5... Tendremos:

100 101 102 103 104 110 111 112 113 114 120 121 122 123
25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38
124 130
39 40.

Veamos ahora: 44 y una unidad son cinco cincos, es decir, 25, que designamos como 100...; 100 son 25 (cuatro veces más)... Estoy un poco cansado. (Descanso de 3 minutos).

Tomemos los números básicos: 5, 25... Luego ha de seguir 125 y así sucesivamente... Esto es, 5 elevado a una potencia, También: 5, 10, 15 y así sucesivamente hasta mil y más. El nú-

mero 149 ha de presentar el aspecto de... Tomemos el número 1000; corresponde al 125, pero ¿cómo comprobarlo?... 1-5 (un cero); 25 (segundo cero)... ¿Tendré que escribir hasta mil? Sí, no hay más remedio que comprobar... Un cero más (en el mil. - A. M.): de nuevo cinco veces más. Está claro que 1000 corresponde a 125.

Hallemos el 1243 (véase más arriba. - A. M.).

Será $125 + 50 + 20 + 3 = 198$. Pero necesitamos hallar el 149. En este caso hay que seguir el camino inverso. 125 es 1000 y queda aún 24...; 24 es 44...; 149 será 1044. Ahora ya puedo encontrar cualquier número, pero no sé encontrar la fórmula.

Exp.: Halle el número 111_5.

Suj.: $100 = 25$; $11 = 6$; $111_5 = 31$.

Exp.: Halle el número 1111_5.

Suj.: $1000 = 125$ y 31, $1111_5 = 156$.

Exp.: Halle el número 111111_5.

Suj.: $1000 = 125$; $10000 = 125 \times 5 = 625$; $100000 = 625 \times 5 = 3125$; $111111 = 3125 + 625 + 156 = 3906$.

Exp.: Escriba la fórmula del número $\underbrace{11 \ldots 11}_{n}{}_5$ en el cual

n designa una cantidad cualquiera de unidades en el número.

Suj.: $1000 = 125 = 5^3$; $10000 = 625 = 5^4$;

$$\underbrace{100 \ldots 0}_{n} = 5^{n-1}$$

Resulta casi lo mismo que en el sistema decimal.

$$\underbrace{11 \ldots 11}_{n}{}_5 = 5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + \ldots$$

¿Cómo será el final? $11 = 6$, pero esto es también 5^1 y 1... Es cierto: $10 = 5^1$.

$$\underbrace{11 \ldots 11}_{n}{}_5 = 5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1.$$

Exp.: Escriba la fórmula del número

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n}{}_5$$

Suj.: Ahora ya no es difícil. Es igual que en el sistema decimal, sólo que es necesario poner 5 en lugar de 10.

Es extraño que no se me haya ocurrido enseguida utilizar la fórmula que he encontrado para el sistema decimal.

4/I/1957.

Exp.: Ayer aprendió usted a expresar los números mediante el sistema numérico de base cinco. Aún existen otros sistemas de numeración. Por ejemplo, en el sistema de base cuatro, los números se designan con las cifras 1, 2, 3, 0. Halle el número 1232_4.

Suj.: Esto ya no ofrece ninguna dificultad. La fórmula general es la misma; lo único que cambia es la base. En este caso, la fórmula será:

$$a \cdot 4^{n-1} + b \cdot 4^{n-2} + \ldots + c \cdot 4 + d;$$

$$1232 = 1 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 12 + 2 = 64 + 32 + 12 + 2 = 110$$

Exp.: Tenemos el sistema de base trece (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *m*, *k*, *l*, 0). Halle el número $1ml0_{13}$.

Suj.: Ahora puedo encontrar un número en cualquier sistema. La fórmula, en el de base trece, será:

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n}{}_{13} = a \cdot 13^{n-1} + b \cdot 13^{n-2} + \ldots + c \cdot 13 + d.$$

Examinemos sólo los números iniciales... $10 = 13$, $12 = 15$ ... $13 + 2 = 15$, esto es correcto. Tomemos el 23. Esto es $13 + 10 = 23$. Como antes...

$$1ml0 = 1 \cdot 13^3 + 10 \cdot 13^2 + 12 \cdot 13 + 0 = 2197 + 1690 + 156 = 4043.$$

Exp.: Escriba la fórmula del número en cualquier sistema numérico de posición

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n}\ (k),$$

en el que *k* denota cualquier base del sistema de numeración.

Suj.: Está perfectamente claro:

$$a \cdot k^{n-1} + b \cdot k^{n-2} + \ldots + c \cdot k + d.$$

La anotación transcrita permite observar tanto el proceso en virtud del cual se descubre la ley que constituye

el principio de la estructuración del número en el sistema decimal, como el papel que desempeña dicho principio en el ulterior análisis cuando se ha de expresar un número según el sistema de base cinco.

Los examinandos saben escribir los números según el sistema decimal y conocen los procedimientos básicos que sirven para operar con esos números, pero no pueden resolver el problema de escribir la fórmula que concierne a la estructura del número. Como hemos visto en la anotación, la resolución de este problema exige el análisis de relaciones que constituyen el principio de la estructura del número. Del examinando se recaba que escriba un número cualquiera, o sea, su fórmula, para lo cual se indican todos los elementos necesarios del número: la base del sistema y la cantidad de cifras. Sin embargo, para utilizar estos elementos, el sujeto ha de discernir su valor en la estructura del número. El índice *n*, que designa el número de elementos de la cantidad, puede ser utilizado en la estructura del número sólo cuando el sujeto distingue el papel que desempeña el *lugar* de la cifra en el número, lo cual está determinado, precisamente, por la cantidad de cifras de este último. Pero tampoco esto basta. Únicamente el análisis de la formación de los órdenes del número partiendo de la delimitación de la base del sistema numérico, permite correlacionar el procedimiento de formación del orden con el procedimiento con que éste se expresa, es decir, hallar el auténtico valor de *n*.

El examinando no conoce el valor de cada elemento de la fórmula del número por lo que tampoco "puede comprender" cómo se escribe la fórmula. El sujeto delimita el valor de la cantidad de cifras (n), pero las cifras del número no son concebidas, con ello, como exponentes de los órdenes.

Éste es el motivo de que al plantear al examinando el siguiente problema (hallar la fórmula del número $\underbrace{100 \ldots 00}_{m}$) no nos propongamos más que un objetivo:

descubrir las relaciones entre el lugar de la cifra en el número (lugar expresado por cualquier cantidad de ceros, m) y la base del sistema. Resulta, sin embargo, que tampoco esta tarea es "más fácil" para el examinando. Toda la dificultad estriba en que puede haber *cualquier* número de ceros. También esto constituye una dificultad real, cuya superación requiere un análisis adecuado. Cualquiera puede escribir un número con una cantidad determinada de ceros; en cambio, la fórmula requiere expresar cualquier número por otro procedimiento según el cual el contenido del orden se exprese no directamente por la cantidad de ceros, sino por cierta relación que expresa cómo se forma el orden. Al invitar al sujeto a que resuelva este problema siendo $m = 5$, no eliminamos la dificultad señalada; lo único que hacemos es dar al examinando un número real que contiene una cantidad determinada de ceros. Esto le permite correlacionar el número concreto con lo que en el problema se pida: hallar el valor de m, es decir, ofrece al sujeto la posibilidad de analizar el número en consonancia con lo que en el problema se pide: hallar la fórmula del número válida para *cualquier cantidad de ceros*. El examinando puede escribir el número siendo m igual a 5 (100.000), pero lo que se exige es hallar la fórmula de este número en la cual la cantidad de ceros situados después de la unidad sea sustituida por la correlación 10^5. Lo que se pide orienta el proceso de análisis del número, la correlación de una serie de números que poseen distinta cantidad de ceros: "Son, pues, cinco ceros. Tenemos 100.000... ¡Ah, bien! 10, 100... Eso es... Cuando añado un cero, el número aumenta en 10 veces. En este caso tenemos 10^5, mientras que $100 \ldots 00 = 10^m$".

m

La relación —diferenciada por el examinando— entre órdenes contiguos ("en más de diez veces") pertenece al contenido numérico, pero en consonancia con lo que en el problema se pide, el examinando correlaciona este conte-

nido con la forma de expresión del número, en la cual dicha correlación se expresa mediante distinta cantidad de ceros.

La correlación entre los números y la cantidad de ceros con que se distingue una unidad, permite al examinando penetrar en las correlaciones que constituyen el contenido del número y establecer la dependencia entre la forma de este último y su contenido.

Como resultado de dicha correlación, el sujeto aísla el valor de 10 como base del grado y el valor de *m* como su exponente. Ésta es la correlación básica que constituye el principio de la formación de la unidad de cualquier orden como número aparte. Pero, habiendo hallado dicho principio, el examinando no puede escribir la fórmula del número en el cual cada orden es designado mediante una unidad. Aquí ya no hay ceros determinantes del contenido de la unidad de orden en dependencia de su lugar. El lugar de la unidad en el número está determinado por la presencia de otras unidades que señalan órdenes. En el caso dado, es necesario hallar el segundo principio (aditivo) de la formación del número en el sistema decimal, con ayuda de la suma de órdenes incluidos en el número.

Correlacionando el nuevo problema con el que acaba de ser resuelto, el sujeto, al iniciar la resolución del nuevo, intenta utilizar el procedimiento —hallado por él mismo— gracias al que se obtiene el principio de la estructuración del orden correlacionando órdenes inmediatos: "Pero con las unidades no cabe esta solución. Tomemos 11, 111, 1111... ¿Qué regularidad se observa en este caso? No veo ninguna. ¿Cómo hay que proceder?"

En el problema anterior, cada orden constituye un número separado. En el nuevo problema, del examinando se exige también escribir la fórmula que indica cómo se forma el *número,* pero teniendo en cuenta que éste ha de constar de órdenes *diferentes.* El examinando no aísla esta diferencia interna de los números, motivo por el cual

correlaciona su contenido numérico no diferenciado en órdenes.

El problema planteado al examinando, requiere el análisis de las correlaciones internas en el número, requiere que se diferencien los órdenes de que el número consta. Es natural que un análisis semejante sólo pueda llevarse a cabo con un número concreto: lo desconocido, expresado en lo que se pide, sólo puede orientar este proceso de análisis. De ahí que para hallar el contenido de cada unidad en el número sea necesario desmembrar el número, descomponerlo en órdenes, cuya formación sea conocida. Ello permite al examinando pasar a un análisis más profundo del número, análisis requerido por la necesidad de escribir la fórmula de este último. El examinando encuentra la fórmula de la estructura del número, en el que cada orden está designado por la unidad, y diferencia las correlaciones entre los órdenes dentro del número.

Al resolver el siguiente problema, que incluye diversos exponentes de los órdenes en el número, el sujeto utiliza para el análisis tanto las relaciones anteriormente delimitadas, las cuales constituyen el principio de la estructura del número, como también el procedimiento de análisis, procedimiento que se expresa en la correlación entre el desconocido "cualquier" número $\underbrace{ab \ldots cd}_{n}$ y el número concreto en el que $n = 4$. En el proceso de la correlación, el examinando descompone "cualquier" número desconocido, siendo $n = 4$, en sus órdenes, de los que son ahora exponentes las letras a, b, c y d. Basándose en este elemento auxiliar, mediador, que nos es dado por la descomposición del número, efectuada al resolver el problema anterior, el examinando encuentra la fórmula de cualquier número en el sistema decimal.

Vemos, por tanto, que hallar la fórmula del número en el sistema decimal constituye un resultado del análisis

y de la síntesis, que van poniendo de manifiesto, sucesivamente, las relaciones en el número, sujetas a ley. Al resolver los problemas planteados, el examinando diferenció el principio de posición de la estructura del número en el sistema decimal, expresó estas relaciones –sujetas a ley– en su fórmula general y las utilizó para designar el número concreto.

Cuando el examinando hubo visto la ley de la estructura del número en el sistema numérico decimal, se le pidió que designara el número 17 en el sistema numeral de base cinco utilizando las cifras 1, 2, 3, 4, 0. Como ya hemos indicado, lo que nos interesaba era el papel que iba a desempeñar la ley encontrada por el examinando en el proceso de asimilación de un nuevo sistema numérico, basado en el mismo principio (de posición).

Como se ve por la anotación, al resolver el problema (designar el número 17), el examinando, en las condiciones del nuevo problema, no ve las leyes que él mismo había descubierto ya para el sistema decimal, razón por la cual no puede hallar enseguida el procedimiento para designar el número en las nuevas condiciones. La falta de correlación entre el viejo procedimiento y las nuevas condiciones provoca un proceso de análisis de los términos del problema: "Aquí ha de haber algún sistema, algún principio. Si escribo, como en el sistema decimal, un uno y un dos (12), ¿será esto doce?... ¿Por qué se da en este sistema el cero? De todos modos 4 y 0 no serán cuarenta. El cero, en el sistema decimal, señala el lugar de una cifra, mas, ¿para qué nos sirve, en este otro caso?"

Analizando las nuevas condiciones, el examinando correlaciona tanto los números expresados con las cifras del sistema de base cinco (22), como algunos de sus elementos (por ejemplo, la cantidad de cifras), con los números correspondientes (12) y con los elementos del sistema decimal. Mas, como se ve por la anotación, el correlacionar los números y sus elementos con el sistema decimal, no conduce a ningún resultado productivo. El examinando se

limita a establecer distintos sistemas de numeración con bases diferentes sin descubrir el principio general que permite designar los números en los distintos sistemas de posición. "Así tenemos cifras aisladas no sujetas a ningún sistema", declara el examinando sin descubrir en este lugar la ley en que se asienta la estructura del número en el sistema decimal. No ve que, en este lugar, es necesario utilizar la ley incluida en el sistema decimal.

Sólo puede escribirse enseguida el número 17 en el sistema de base cinco cuando se ha descubierto ya la ley general a que obedece la estructura de los números en el sistema indicado. El examinando no lleva a cabo dicha tarea porque le pedimos que cumpla otra más sencilla: escribir el número 5. Esto puede hacerse sin recurrir a la fórmula general, continuando la serie numérica. Para el número 5 no existe la cifra correspondiente en el sistema de base cinco, es necesario designarlo mediante otro proceso de análisis el cual, como vemos por la anotación, también en este caso se efectúa a través de un acto de síntesis. Dicha síntesis se expresa en la correlación entre el número que ha de ser designado y el del sistema decimal que le corresponde por la forma (por el lugar ocupado en la serie numérica). El examinando dice: "Aquí, cuando las cifras se acaban, ha de empezar el segundo orden: 1, 2, 3, 4, 0; 1, 2, 3, 4, 0... Éste es el segundo orden. Veamos cómo se designa la segunda unidad en el sistema decimal. En este sistema, la unidad y el cero son 10. En el otro sistema, la unidad y el cero serán 5... Cuando escribo 1, tengo 1. Cuando escribo un uno y un cero, tengo 10. En el sistema de base cinco, cuando escribo 1 tengo 1. Cuando escribo el uno con el cero, tengo 5. En el sistema decimal, dos unidades forman el número 11. En el otro sistema, formarán el número 6... Nada más. Según el sistema decimal, ...21 = 11; 22 = 12...".

Basándose en la correlación, así obtenida, entre la serie numérica del sistema de base cinco y los elementos co-

rrespondientes de la serie del sistema decimal, el examinando diferencia la forma con que se designa el número en el sistema de base cinco y halla el procedimiento de designación correspondiente a las correlaciones puestas de relieve.

Sin embargo, dicho procedimiento no se basa en la delimitación de la ley de la estructura del número en el sistema numérico de base cinco, y por este motivo el examinando prosigue el análisis con el fin de encontrar la ley necesaria para resolver el problema planteado:

"*Exp.* Escriba 38 (en el sistema de base cinco).

Suj. Es necesario hallar un sistema. Usted puede mandarme escribir un número grande cualquiera... 5 = 10; 10 = 20: es dos veces mayor. Pero 24 = 14; 32 = 17... No, todavía no sé cuál es el sistema".

La necesidad del análisis de las nuevas condiciones está determinada por la necesidad de diferenciar la regularidad general. Para ello, el examinando construye la serie numérica en el sistema de base cinco:

1 2 3 4 10 11...
1 2 3 4 5 6

etc. (Véase cómo resuelve el examinando L. D. el problema de escribir el número 149 según el sistema de base cinco, págs. 168-169).

Al analizar la serie numérica, el examinando separa los "números básicos" ("Tomemos los números básicos: 5, 25... *Luego ha de seguir 125* y así sucesivamente ...esto es, 5 elevado a una potencia"), que constituyen las unidades de los órdenes en el nuevo sistema de numeración. Los correlaciona entre sí y encuentra el principio en que se basa la formación de los órdenes en el nuevo sistema, distingue su base (5) como unidad fundamental para la formación del número en ese sistema. Hecha esta operación, el examinando realmente puede encontrar cualquier número, pese a no haber descubierto aún otras relaciones que constituyen la ley expresada en la fórmula del nú-

mero. Para hallar esta fórmula, no basta conocer el principio en que se basa la formación de los órdenes. Es necesario, además, descubrir la forma de unión de los distintos órdenes en el número, la forma de su expresión no como números aislados, sino como unidades de cómputo de que consta cualquier número.

Por este motivo invitamos al examinando a resolver un problema (hallar el número 111_5) que requería el análisis de las relaciones aludidas, indispensables para desentrañar la regularidad expresada en la fórmula.

Exp.: Halle el número 111_5.

Suj.: $100 = 25$; $11 = 6$; $111_5 = 31$.

Exp.: Halle el número 1111_5.

Suj.: $1000 = 125$ y 31, $1111_5 = 156$.

Exp.: Halle el número 111111_5.

Suj.: $1000 = 125$; $10000 = 125 \times 5 = 625$; $100000 = 625 \times 5 = 3125$; $111111_5 = 3125 + 625 + 156 = 3906$.

Exp.: Escriba la fórmula del número

$$\underbrace{11 \ldots 11}_{n}{}_5$$

en el cual *n designa* una cantidad cualquiera de unidades en el número.

Suj.: $1000 = 125 = 5^3$; $10000 = 625 = 5^4$;

$$\underbrace{100 \ldots 0}_{n} = 5^{n-1} \ldots$$

Resulta casi lo mismo que en el sistema decimal.

$$\underbrace{11 \ldots 11}_{n}{}_5 = 5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots +,$$

¿Cómo será el final? $11 = 6$, pero esto es también 5^1 y 1... Es cierto: $10 = 5^1$.

$$\underbrace{11 \ldots 11}_{n}{}_5 = 5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1.$$

Exp.: Escriba la fórmula del número

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n}{}_{5}$$

Suj.: Ahora ya no es difícil. Es igual que en el sistema decimal, sólo que es necesario poner 5 en lugar de 10... Es extraño que no se me haya ocurrido enseguida utilizar la fórmula que he encontrado para el sistema decimal.

Descomponiendo el número del sistema de base cinco en sus órdenes, el examinando encuentra el contenido numérico de nuevos órdenes. Además, para el análisis utiliza el principio de la formación de los órdenes, anteriormente hallado. Sobre esta base distingue el examinando el principio aditivo de la formación del número, la forma en que los órdenes se expresan no como números separados, sino como componentes del número.

De esta suerte, las relaciones fundamentales, que constituyen la ley que rige la formación del número en el sistema de base cinco, son halladas por el examinando antes de resolver el problema que requiere encontrar la *fórmula* del número al tener que *designar un número* en el sistema de base cinco. El examinando resuelve enseguida el ejercicio consistente en "escribir la fórmula del número" porque ya ha visto las relaciones que ha de expresar en ella.

En este caso, la necesidad de diferenciar las relaciones sujetas a ley en la generalización, está dictada por el hecho de que, al margen de esta última, el examinando no podría resolver el problema que tiene planteado.

En calidad de experimento de control, con el que era posible comprobar el nivel de la generalización y su papel al resolver el problema en las nuevas condiciones, pedimos al examinando que designara el número en otros dos sistemas numéricos de posición (nuevos) y encontrara la fórmula de la estructuración del número para cualquier sistema.

La anotación transcrita pone de manifiesto que el haber hallado la ley a que obedece la estructura del número en el sistema de base cinco, permite al examinando aprovechar dicha ley para fundamentar el número en las condiciones de otros sistemas numéricos de posición. En este caso, el examinando no analiza ya los principios de la estructuración del número en las nuevas condiciones, sino que utiliza la fórmula hallada de antemano teniendo en cuenta los cambios que se han producido en los términos del problema: "La fórmula general es la misma —dice el examinando—; lo único que cambia es la base". El examinando está en condiciones, ya, de escribir también la fórmula del número para cualquier sistema de numeración.

Esto significa que el examinando, en el proceso gracias al cual llega a comprender la estructura del sistema numérico de base cinco, descubre también las relaciones, sujetas a ley, que constituyen el contenido de la generalización. La generalización efectuada es lo que permite al sujeto operar en nuevas condiciones sin someterlas a un análisis previo.

¿En qué radican las causas de que el examinando no pueda aprovechar la ley descubierta por él mismo en el sistema decimal y, en cambio, la aproveche después de analizar las condiciones de designación del número en el sistema de base cinco?

Nosotros vemos la explicación del hecho indicado en el carácter de las etapas por las que pasa el proceso del análisis hasta llegar a la generalización requerida.

Al analizar las condiciones en que se designa el número según el sistema numérico decimal, el examinando separa sólo las relaciones indispensables para resolver el problema en los términos concretos dados. La ley descubierta por el examinando se encuentra fundida con las relaciones concretas que constituyen el principio de la estructura del número en el sistema *decimal*. Cuando intenta utilizar por entero la fórmula hallada y no su principio general, el examinando, como es lógico, llega a la

conclusión de que es imposible resolver el problema en las nuevas condiciones, en consonancia con las leyes del sistema decimal.

Para resolver el problema en las nuevas condiciones, se exige un nivel más alto de generalización, de modo que su contenido sea la ley de la estructura de *cualquier* número en *cualquier* sistema numérico de posición. Precisamente el camino para encontrar esta ley general constituye un nuevo nivel de generalización, lo que está expresado en el proceso de análisis del sistema numérico de base cinco. Al poner de manifiesto las leyes a que obedece la designación del número en dicho sistema, el examinando recorre una serie de etapas que caracteriza el movimiento del proceso de análisis y los distintos niveles de generalización que así se alcanzan.

1. En la primera etapa del análisis de las condiciones de designación en un nuevo sistema numérico, el examinando, al correlacionar los términos de la designación del número en el nuevo sistema con su designación en el sistema decimal, descubre la fórmula de designación de un número aislado. Partiendo de esta base, sólo puede designar los números continuando la serie numérica de un número conocido (5 = 10; 6 = 11; 7 = 12, etc.).

2. En la segunda etapa, al diferenciar en la serie numérica obtenida, las unidades de los órdenes del nuevo sistema numérico (5, 25, 125) y al correlacionarlas entre sí, el examinando descubre el principio en virtud del cual se forman las unidades de los órdenes. Partiendo de esta distinción, el examinando puede designar los números continuando la serie numérica por las unidades de los órdenes (25 = 100, 125 = 1.000, 625 = 10.000, 627 = 10.002), sin utilizar toda la serie numérica.

3. En la tercera etapa, al descomponer el número designado mediante unidades (111 = 25 + 5 + 1 = 31), el examinando descubre el principio en virtud del que se unen distintos órdenes en el número. Ello le permite designar los números descomponiéndolos en las unidades de

los órdenes sin utilizar la serie numérica (627 = 10.000 + 2 = 10.002).

4. Utilizando los resultados del análisis efectuado, el examinando, en la cuarta etapa, descubre sin dificultad la fórmula que corresponde a la estructura de cualquier número en el nuevo sistema de numeración. Partiendo de esta base, lo mismo puede designar enseguida cualquier número en el nuevo sistema de numeración que hallar el contenido numérico expresado en la forma nueva (1023 = 125 + 10 + 3 = 138).

5. Correlacionando luego la ley a que obedece la estructura del número en el sistema de base cinco con la ley de dicha estructura en el sistema decimal, el examinando diferencia las particularidades que se dan en las bases de los sistemas de numeración y delimita el valor general de las relaciones fundamentales para designar el número en los distintos sistemas de posición. Ello es lo que permite al examinando, después de analizar las condiciones en que se designa el número en el sistema de base cinco, designar los números en cualquier sistema numérico de posición.

Las etapas por las que pasa el movimiento del proceso de análisis y los distintos niveles de generalización que así se alcanzan, permiten explicar el hecho de que el examinando utilice en nuevas condiciones la regularidad que ha descubierto al analizar en qué condiciones se designan los números en el sistema numérico de base cinco. Sin embargo, las etapas por las que pasa el movimiento del proceso de análisis no permiten aclarar plenamente el segundo hecho, es decir, el que no se realice dicha utilización después de descubrir la ley sólo en el sistema decimal. Para elucidar este hecho se llevaron a cabo dos series más de experimentos (segunda y tercera).

Generalización de relaciones partiendo de la designación previa de los números en el sistema de base cinco

En la segunda serie de experimentos, se pedía primero al examinando que designara los números en el sistema numérico de base cinco. Como quiera que las tentativas hechas en este sentido por el examinando resultaban infructuosas, le indicábamos que examinara la formación del número en el sistema decimal. Después de que el sujeto había hallado la fórmula de la estructura del número en el sistema decimal, le volvíamos de nuevo a la resolución del primer problema.

Examinemos los resultados de los experimentos.

9/I/1957 *Anotación Nº 35* *Suj.: G. A.*

Exp.: En la escuela estudió usted el sistema métrico decimal. Para designar un número, cualquiera que sea, en dicho sistema, utilizamos diez cifras: 1, 2, 3 ... 8, 9, 0. Además del sistema numérico decimal, existen otros sistemas de numeración. En el de base cinco, bastan cinco cifras: 1, 2, 3, 4, 0 para designar cualquier número. El ejercicio que ha de efectuar usted, consiste en escribir números en el sistema numérico de base cinco. Escriba el número 17.

Suj.: Bien... Supongamos que 17 es 1034 (10 = 10; 3 = 3; 4 = 4; 10 + 3 + 4 = 17. - A. M.)... Pero, ¿cómo estructurar, en este caso, otros números?... No, difícilmente eso estará bien... 5, 6, 7, 8, 9... Resulta que ya se ha llegado a diez, y no es posible designar el 9, el 8 y otros números. Si se tomaran, entonces, 01, 02, 03, 04, tendríamos que: 01 = 5; 02 = 6. Pero en este caso resulta que 32 también es igual a 5 (por medio de la suma. - A. M.) y 41 también es 5. Así no hay univocidad; esto no es posible. ¿Se puede sumar o multiplicar?

Exp.: No, no se puede.

Suj.: Ahora voy a examinar cómo se estructuran los números en el sistema decimal... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0... Pero no sé qué elegir en lugar de estos últimos números (6, 7, 8, 9). Hay que hacerlo de tal modo que las designaciones sean unívocas.

Exp.: Fíjese usted bien cómo se forman los números según el sistema decimal.

Suj.: En este sistema la cosa es sencilla: se añade una cifra y se obtiene un nuevo orden... 10 = 10, 11 = 11, y así sucesivamente. Hay que sacar un método que pueda aplicarse también

al sistema de base cinco. Comprendo cómo al comienzo... (se forman los números en el sistema decimal. - A. M.), pero no sé cómo será más adelante. 5 equivale a 10; 11, a 6; 12, a 7; 13, a 8; 14, a 9... ¿Pero y luego? Supongamos que sea así: 20 equivale a 10; 21, a 11; 22, a 12; 23, a 13; 24, a 14; 25, a 15...

Exp.: El 5 no existe.

Suj.: 20 + 10 será 15, y entonces 17 será 20 + 12.

Exp.: Pero no es posible adicionar de ese modo.

Suj.: Pues, ¿de qué otro modo puede hacerse? Si, por ejemplo, 30 = 20, no habrá, en este caso, diecisiete, dieciocho.

Exp.: Prosigamos el análisis del sistema decimal. Escriba la fórmula de la estructura del número en el sistema decimal si

$$\underbrace{ab\ \ldots\ cd}_{n}\ (10)$$

es un número cualquiera en el cual las letras son unas cifras cualesquiera y n indica que puede ser cualquiera la cantidad de cifras del número.

Suj.: ¿Pero cuál puede ser, aquí, la fórmula de la estructura? No lo comprendo.

Exp.: Tomemos otro problema. Se nos ha dado el número del sistema decimal

$$\underbrace{10\ \ldots\ 0}_{m}$$

en el que m designa una cantidad cualquiera de ceros. ¿Cómo está formado?

Suj.: Si está indicada la cantidad de ceros, queda claro de qué número se trata. Supongamos que haya tres ceros, tendremos 1000.

Exp.: Se nos dan 9, 4 y 5. Escriba todos los números distintos que puedan formarse con estas cifras.

Suj.: 945, 954, 495, 459, 594, 549.

Exp.: Escriba lo que designa cada cifra en estos números.

Suj.: Esto significa: 945 = 900 + 40 + 5; 954 = 900 + 50 + + 4; 495 = 400 + 90 + 5. Aquí, el lugar de la cifra y la cifra misma dan cierto número. Pero tampoco es esto. En el sistema decimal, según sea el lugar de la cifra, tenemos un valor u otro (de la cifra)... El primer lugar es el de las unidades; el segundo, el de las decenas; el tercero, el de las centenas...

Exp.: Escriba la fórmula del número

$$\underbrace{11\ \ldots\ 11}_{n}\ (10)$$

Suj.:

$$\underbrace{11\ldots11}_{n}(10) = \underbrace{10\ldots0}_{n-1} + \underbrace{10\ldots0}_{n-2} + \ldots + 10 + 1$$

Exp.: Escriba la fórmula del número

$$\underbrace{10\ldots0}_{m}, \text{ si } m = 1221.$$

Suj.: Es un número en el que la cantidad de ceros es 1221. Estos números tan grandes también se designan así: 10^{1221}.

Exp.: ¿Por qué?

Suj.: Porque se da una igualdad, por ejemplo: $100 = 10^2$. Entonces, el número

$$\underbrace{10\ldots0}_{m}$$

puede escribirse como 10^m, mientras que

$$\underbrace{11\ldots11}_{n}$$

será igual a $10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1$.

Exp.: Continuemos la resolución del problema en el sistema de base cinco. Necesitábamos designar el número 17.

Suj.: He designado el 17 como 20 + 12, pero he utilizado aquí procedimientos de designación distintos, uno al comienzo (11 = = 6) y el segundo ahora (20 + 11 = 16). Es necesario uno solo. Estoy muy acostumbrado al sistema decimal y eso estorba. Supongamos que he de escribir el número 196. ¿Cómo lo haré? 10 equivale a 5; 20, a 10; 30, a 15. No, 30 no será 15. ¿Qué será 30? 20 + 14 será 19; 30, será 20.

Exp.: Usted emplea procedimientos distintos al designar los números.

Suj.: En el sistema decimal no hay dificultades, existe una rigurosa ley de la estructura del número, pero ¿y aquí? Aquí... Bueno, está bien... Tengo miedo de confundirme con estos números, por esto procederé de otro modo... 10 equivale a 5; 20, a 6; 30, a 7; 40, a 8; pero de este modo no obtenemos el 9. Si tomamos, por ejemplo, un sistema de base dos, probablemente habrá dos cifras: 1 y 0. El 0 tiene en este caso un significado especial. Pero no puedo comprender cuál es.

Exp.: De todos modos escriba 17.

Suj.: Lo que quiero es descubrir la ley.

Exp.: Pero necesitamos escribir números. Ha escrito 14, prosiga.

Suj.: Voy a ver... Así, 210 = 15, 211 = 16, 212 = 17. Bueno, pero si he de escribir 196, ¿cómo escribir 90? Me parece que este procedimiento no es acertado.

Exp.: Usted ha expresado 10 por 20 y ahora lo expresa por 200.

Suj.: Cierto, esto no está bien. Quizá pueda poner 30 = 15; en este caso, 31 = 16; 32 = 17. Por lo visto tendremos luego 40 = 20, 50 = 25, 60 = 30.

Exp.: No existen estas cifras (5, 6).

Suj.: 40 = 20... ¿Pero cómo escribir 100?

Exp.: Escriba 28.

Suj.: Quiero escribir de una vez 196 y luego 28. En el sistema decimal, 12 equivale a 10 + 2. En el segundo lugar tenemos las decenas; en el tercero, las centenas. El signo "+" puede sobreentenderse también después de dos cifras. El número de las decenas, también después de dos cifras: 00 - 0; 01 - 1; 02 - 2; 03 - 3; 04 - 4... 10 - 5; 11 - 6; 12 - 7; 13 - 8; 14 - 9... Entonces el número 196 se escribirá así: 01 14 11. He encontrado todas las cifras y he utilizado el principio del sistema decimal.

Exp.: En los términos del problema, le han sido dadas las cifras 1 = 1, 2 = 2; 3 = 3; 4 = 4. Éstos son sus valores. No hace falta buscarlos, mas es necesario designar otros números mediante las cifras dadas.

Suj.: Así, pues, a pesar de todo es necesario escribir en el sistema de base cinco. Pero no lo conozco. Si conociera la ley, resultaría fácil. ¿Y si utilizo la numeración romana?

Exp.: No es posible cambiar las cifras dadas. Escriba la serie numérica hasta 28.

Suj.: Hasta el número 28 no creo que haya dificultad, pero tampoco vamos a obtener el 90, según me parece.

Exp.: De todos modos escriba 28.

Suj.: 20 = 10, 30 = 15, 32 = 17, 33 será 18, 34 = 19, 40 = 20; admitamos que 43 será 28.

Exp.: ¿Por qué?

Suj.: Sí, pero ¿cómo será entonces 21? ¿Cómo orientarse en esta cuestión? Si 40 + 10 equivale a 21, esto no sirve. Volveré a escribir los números... 31 - 16, 34 - 19, 40 - 20, pero ¿qué significará el 41? 41 es 21... Bien, entonces 44 - 24; 50 - 25. No, así no es posible. ¿Cómo escribir 25? 40 - 20 y 10 - 5, si 40 + 10, entonces no resulta bien. Parece como si hubiera dos series distintas. Las cifras primeras a la derecha se designan a sí mismas (son las unidades. - A. M.), mientras que las segundas dependen

de las que tienen delante. Resulta, así, que existe una complicada dependencia... 44 son 24. Para proseguir, será necesario escribir en el tercer lugar. Supongamos que me resulta 110. En este caso surge una contradicción. Es necesario hallar alguna ley general y sólo entonces escribir. Si 101 = 11, 300 = 30, entonces no es posible designar el número 50.

Exp.: ¿No se dan en el sistema decimal casos en que el número está formado por los máximos valores de las cifras?

Suj.: Sí, el 99, al que sigue 100. Así, en nuestro caso, tenemos también: 25 - 100. ¿Cómo será, entonces, 26? Será 101, y también: 28 - 103; 29 - 104. ¿Pero y 30? ¿Cómo será, en este caso, 30? Así 29 - 104, 30 - 110, 31 - 111, 32 - 112, 33 - 113, 34 - 114, 35... Tendrá que hacerse así: 35 - 120... 39 - 124, 40 será 130; 44 - 134, 45 - 140... No es posible pasar de 150... 141 - 46, 144 - 49, 50... Habrá que poner el siguiente 50 - 200. Ahora empiezo a ver un poco... 100 son 25; 200, 50; 300, 75; 400, 100.

Exp.: Escriba 136.

Suj.: De todos modos, ¿cuál es la ley que rige aquí? Voy a continuar... 401 - 101, 404 - 104, 410 - 105, 414 - 109, 420 - 110, 424 - 114, 430 - 115, 434 - 119, 440 - 120, 444 - 124 ... 1000 - 125... Entonces, 1004 - 129, 1010 - 130, 1014 - 134, 1020 - 135, 1024 - 139, 1030 - 140, 1034 - 144, 1040 - 145, 1044 - 149, 1100 - 150, 1104 - 154, 1110 - 155, 1120 - 160, 1140 - 170, 1144 - 174, 1200 - 175, 1300 - 200.

Exp.: Escriba el número 11111_5. No se debe continuar la serie numérica.

Suj.: Entonces lo que he de hacer es encontrar el valor de los números que forman 11111. En realidad, necesito encontrar 10000... 10 = 5, 100 = 25, 1000 = 125... ¿Pero cómo será 10000? Ya, la cosa no está mal... $5 \cdot 5 = 25$; $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Resulta que cada nuevo número aumenta en cinco veces; en este caso, $10000 = 125 \cdot 5 = 625$, $11111 = 781$.

Exp.: Encuentre 100000.

Suj.: $100000 = 625 \times 5 = 3125$.

Exp.: Encuentre la fórmula del número

$$\underbrace{10\ \ldots\ 0}_{m}\ (5)$$

Suj.: Tenemos: 10 - 5; 100 - 5^2; por tanto

$$\underbrace{10\ \ldots\ 0}_{m}\ (5) = 5^m$$

Exp.: Encuentre la fórmula del número

$$\underbrace{11 \ldots 11}_{n} (5)$$

Suj.: Vamos a ver... 1 - 1, 11 - 6, 111 - 31, 1111 - 156, 11111 - 781... Así no se obtiene nada. Aunque... Un momento, hay que examinar cada número. $11 = 6 = 5 + 1$, $111 = 25 + 5 + 1$, $1111 = 156 = 125 + 25 + 5 + 1$, $11111 = 625 + 125 + 25 + 5 + 1 = 781$. Bien, la ley está descubierta. Aquí $11111 = 5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1$.

Exp.: Escriba la fórmula del número

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n} (5)$$

Suj.: Esto me va a llevar su tiempo. Si tomamos el dos: 2 - 2, 22 - 12, 222 - ? 100 - 25, 112 - 32, 200 - 50... No se comprende bien. ¿Hay aquí alguna ley?

Exp.: Halle el número 4231_5 sin utilizar la tabla.

Suj.: Sé lo que designa 1000, pero no sé cómo designar 4000. Por esto me siento tan inclinado a elaborar la tabla (de la serie numérica. - A. M.), así encontraría 4000.

Exp.: No se debe elaborar la tabla.

Suj.: Sin esto es difícil, hay que guiarse por algún principio. ¿Qué significa aquí, por ejemplo, el cuatro...? Cuando figura la unidad, está claro (1000. - A. M.), pero ¿y si hay 4000? No hay más remedio que construir la tabla, de otro modo no puedo... 1000 - 125, 1100 - 150, 1200 - 175.

Exp.: Encuentre sin tabla a qué es igual 400.

Suj.: 100 = 25, pero ¿qué son 200? Son 50, dos veces más... 300 - 75, 400 - 100... Esto es: 4×25. Está claro: $4000 = 125 \times 4 = 500$.

$$\begin{array}{r} 4000 - 500 \\ 200 - 50 \\ 30 - 15 \\ 1 - 1 \\ \hline 566 \end{array}$$

Ahora puedo encontrar la fórmula del número... 4000 es 4 por 1000, 1000 es 5 elevado a la tercera potencia.

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n} (5) = a \cdot 5^{n-1} + b \cdot 5^{n-2} + \ldots + c \cdot 5 + d$$

Exp.: Encuentre el número 32320_5.

Suj.: Ahora puedo encontrar cualquier número... $32320_5 = 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 0 = 3 \cdot 625 + 2 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 10 = 1875 + 250 + 75 + 10 = 2210$.

10/I/1957.

Exp.: Ahora vamos a contar usted y yo empleando el sistema numérico de base tres, en el cual bastan tres cifras: 1, 2, 0 para designar un número cualquiera. Halle el número 1120_3.

Suj.: $\underbrace{ab \ldots cd}_{n}{}_3 = a \cdot 3^{n-1} + b \cdot 3^{n-2} + \ldots + c \cdot 3 + d$

$1120_3 = 3^3 + 3^2 + 2 \cdot 3 = 27 + 9 + 6 = 42$.

Exp.: Halle el número 17_{10} en el sistema numérico de base tres.

Suj.: 17 puede escribirse así: $3^2 + 3$ y quedan 5. ¿Cómo representar el 5? No, ni siquiera así. $17 = 3^2 + 3 \times 2 + 2$, lo cual será igual a 122.

Exp.: Exprese el número 39_{10} en el sistema de base tres.

Suj: Esto irá rápidamente, porque tengo la fórmula general... $39 = 3^3 + 3^2 + 3 = 111$. Es extraño, por qué resulta menos de 17. Está claro, aquí falta una unidad... $39 = 1110$.

Exp.: Se nos da el sistema de base doce, en el cual, además de 1, 2 ... 8, 9, hay aún las cifras $a = 10$, $b = 11$ y 0. Encuentre el número $1ab_{12}$.

Suj.: $1ab_{12} = 1 \cdot 12^2 + a \cdot 12 + b = 144 + 120 + 11 = 275$.

Exp.: Escriba la fórmula del número para cualquier sistema de numeración (la base del sistema puede ser k).

Suj.:

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n}\,(k) = a \cdot k^{n-1} + b \cdot k^{n-2} + \ldots + c \cdot k + d$$

Exp.: Halle el número 11100 escrito en el sistema numérico de base dos.

Suj.: $11100 = \ldots$ El caso es que no tenemos aquí más que un signo (1. - A. M.)... $1 + 1 + 1 \ldots$ No, no es esto. La base es 2, por tanto $11100 = 2^4 + 2^3 + 2^2 = 16 + 8 + 4 = 28$.

Exp.: Halle el número 37_{10} en el sistema de base dos.

Suj.: $37 = 2^5 + 2^2 + 1 = 100101$.

La anotación transcrita muestra que el examinando G. A., para designar los números en el sistema de base cinco, no utiliza la ley de la estructura del número descubierta en el sistema decimal. Cuando se le pide que escriba el número 17 en el sistema de base cinco, el examinando analiza diversos procedimientos de formación del número —que le son conocidos— y los desecha como condiciones que no le satisfacen para designar el número 17 mediante una cantidad limitada de cifras. Luego, el examinando, analizando las condiciones para designar los números 6, 7, 8 y 9 en consonancia con las nuevas exigencias, modifica el valor de las cifras del sistema de base cinco añadiéndoles ceros. Pero como quiera que el resultado de semejante designación conduce a una multivocidad en la expresión de un mismo número —lo cual no corresponde a los requisitos de la designación— el examinando empieza un nuevo proceso de análisis: "Ahora voy a examinar cómo se estructuran los números en el sistema decimal...".

Durante el análisis de los procedimientos para designar el número, el propio examinando recurre al análisis del número en el sistema decimal. De ahí que el momento en que incluye el análisis del sistema decimal en el proceso correspondiente al sistema de base cinco, concuerda con el momento en que el examinando pasa al análisis del sistema decimal. El examinando comprende la necesidad de semejante análisis para "sacar un método que pueda aplicarse también al sistema de base cinco".

Analizando el número en el sistema decimal, el examinando señala las relaciones fundamentales que sirven de base para estructurar el número. "Aquí, el lugar de la cifra y la cifra misma dan cierto número... En el sistema decimal, según sea el lugar de la cifra, tenemos un valor u otro (valor de la cifra. — A. M.)... El primer lugar es el de las unidades; el segundo, el de las decenas; el tercero, el de las centenas...".

El examinando no sólo pone de relieve el valor del lugar de la cifra en el número, sino que, además, al resolver el problema subsiguiente, descubre el contenido del principio de posición en la estructura del número, descubre la relación entre la base del sistema numérico (10) y el lugar de la cifra en el número:

"*Suj.:* Estos números tan grandes también se designan así: 10^{1221}.

Exp.: ¿Por qué?

Suj.: Porque se da una igualdad, por ejemplo: $100 = 10^2$. Entonces, el número $10\underbrace{\ldots}_{m}0$ puede escribirse como 10^m, mientras que $\underbrace{11\ldots11}_{n}$ será igual a $10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1$".

De este modo, el examinando descubre la ley de la estructura del número del sistema decimal en el proceso del análisis, análisis cuya necesidad estaba determinada por el problema de estructurar el número en el sistema de base cinco.

Partiendo de lo así logrado, reintegramos al examinando al cumplimiento del problema primeramente planteado (designar el número 17 en el sistema de base cinco). Como se ve por la anotación, el examinando sigue resolviendo este problema sin relacionarlo de ningún modo con la ley que acaba de descubrir: "He designado el 17 como 20 + 12, pero he utilizado aquí procedimientos de designación distintos, uno al comienzo (11 = 6), y el segundo ahora (10 + 11 = 16). Es necesario uno solo. Estoy muy acostumbrado al sistema decimal y eso estorba...".

El examinando no sólo deja de utilizar la ley que ha descubierto, sino que, como él mismo se expresa, dicha ley le "estorba".

Para el examinando, la ley hallada por él mismo concierne sólo al sistema decimal ("En el sistema decimal no hay dificultades —dice—, existe una rigurosa ley de la estructura del número, pero ¿y aquí?"). En el sistema de base cinco, el examinando busca nuevamente una ley. Tan sólo después de haber visto en dicho sistema la ley del sistema de posición, la aplica el examinando para designar el número en cualquier otro sistema numérico del mismo tipo.

Tanto en la primera serie de experimentos como en la segunda, el problema que consiste en hallar la ley a que obedece la estructura del número en el sistema decimal no está determinado por la *necesidad* de *designar el número* en dicho sistema, pues el examinando domina ya el procedimiento correspondiente. De ahí que, en este caso, necesite sólo hallar la fórmula general de *cualquier* número en el sistema de base diez, sin que deba poner de relieve la relación entre los elementos de la fórmula del número y el procedimiento de su designación mediante una cantidad limitada de cifras.

En el sistema numérico de base cinco presentamos a los examinandos el problema de *designar el número*. Para ello, éstos debían descubrir la correlación entre los elementos de la fórmula del número y el procedimiento de su designación, como, por ejemplo, entre la designación del orden, el exponente del grado, la base y el lugar (posición) de la cifra al designar el número.

Después de haber resuelto el problema de designar el número en el sistema de base cinco partiendo de su fórmula, los examinandos se hallaban en condiciones de resolver el mismo problema aplicado a cualquier sistema numérico de posición, dado que todas las relaciones que para ello se requieren habían sido delimitadas ya por medio del análisis.

Generalización de relaciones partiendo del análisis previo de la fórmula del número en el sistema decimal

En la III serie de experimentos, el examinando tenía que analizar las relaciones entre el procedimiento de designación que le era conocido y la ley hallada: había que descubrir el significado de cada relación básica de la fórmula para designar un número concreto.

Tanto el principio de posición como la designación de un número partiendo de dicho principio surgen de la necesidad de expresar las relaciones cuantitativas recurriendo a un limitado número de cifras. De ahí que, hallada la fórmula del número, planteáramos al examinando el problema de descubrir la posibilidad de designar un número cualquiera mediante una cantidad de cifras limitada. El problema exigía del sujeto que correlacionara la fórmula del número con la designación de un número concreto.

Transcribimos una de las anotaciones típicas de este experimento.

15/I/1957. *Anotación Nº 37* *Suj.: S. B.*

Exp.: En la escuela ha estudiado usted el sistema numérico decimal, en el que se designa un número, cualquiera que sea, mediante diez cifras. ¿Cómo es posible designar cualquier guarismo disponiendo sólo de diez cifras? Escriba la fórmula del número

$$\underbrace{ab \ldots cd}_{n}\,(10)$$

en el sistema decimal, teniendo en cuenta que las letras *a*, *b*, *c*, *d* designan cifras cualesquiera y *n* indica cualquier número de cifras en el número.

Suj.: Tomo, por ejemplo, el número 333. Es igual a $3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3$... Pero no tenemos más que el 10; entonces, podemos escribir: $3 \cdot 10^{3-1} + 3 \cdot 10^{2-1} + 3 \cdot 10^{1-1}$. En la fórmula será:

$$a \cdot 10^{n-1} + b \cdot 10^{n-2} + \ldots + c \cdot 10 + d \cdot 10^{0}.$$

Exp.: Explique la fórmula.

Suj.: En el sistema decimal se dan distintas combinaciones de cifras que designan un número; en la fórmula hay que expresarlas mediante el 10.

Exp.: ¿Por qué?

Suj.: Porque para escribir la fórmula, no tenemos más que los exponentes siguientes: *a, b, c, d,* que son cifras; su cantidad, *n,* y 10. Empecemos por la derecha: *d* significa unidades y, respecto a 10, será 10 elevado a la potencia cero; siguen luego las decenas que, respecto a 10, será 10 elevado a la primera potencia; después tenemos $100 = 10^2$, etc.

Exp.: ¿Qué indica el exponente de la potencia?

Suj.: El exponente de la potencia indica el orden (del número. - A. M.).

Exp.: ¿Por qué el exponente de la potencia indica el orden?

Suj.: ¿He escrito bien la fórmula? Lo comprobaré una vez más (examina el número 333 y su fórmula). La fórmula es correcta. El número consta de *n* cifras, pero las cifras en el número están vinculadas a la decena, las unidades, respecto al 10, son 10^0; las centenas, respecto al 10, son 10^2. Mientras que todo el número... resulta como una suma de magnitudes decimales. La fórmula es una anotación breve de un número cualquiera. En la fórmula tenemos que el primer exponente de la potencia es n-1. Resulta así porque las unidades son 10^0.

Exp.: ¿Por qué coloca el número *n* como exponente de la potencia?

Suj.: Porque es necesario encontrar la especie general del número en el sistema de base diez... para determinar el miembro "enésimo" en dependencia de *n.* Bueno... digamos... Para que el miembro de la suma esté determinado en función de su orden, es decir, del lugar que ocupe en el número. Escribimos a la izquierda el orden superior y a la derecha el inferior; por ejemplo, son diferentes los números 311 y 113.

Exp.: ¿Qué determina la necesidad del propio sistema decimal?

Suj.: Es posible que antes no existiera, y luego empezaron a escribir de esta manera.

Exp.: ¿Por qué hace falta una fórmula semejante para designar el número en el sistema decimal? Observe que los primeros números los designamos sin fórmula alguna, simplemente mediante las cifras 2, 3, 5.

Suj.: Con ayuda de una cifra sólo podemos designar números aislados, pero los números son muchos y por este motivo utilizamos la posibilidad de repetir las cifras, sus diversas combinaciones. De este modo podemos designar cualquier número.

Exp.: Ahora escribiremos los números en el sistema de base cinco. En este caso disponemos sólo de cinco cifras: 1, 2, 3, 4, 0 para designar un número cualquiera. Escriba el número 17.

Suj.: Veamos cuántos cincos contiene: $17 : 5 = 3$ y queda 2. El orden de las "cinquenas" *también* figurará en el segundo lugar... Tendremos en este sistema los órdenes 1, 5, 25... $17 = 32$.

Exp.: ¿Por qué?

Suj.: $32 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1$... Aquí podemos generalizar la fórmula que encontramos para el sistema decimal, pero tenemos que sustituir 10 por 5... En este caso, la fórmula será:

$$d \cdot 5^0 + c \cdot 5^1 + \ldots + b \cdot 5^{n-2} + a \cdot 5^{n-1}$$

En el sistema de base cinco, 32 significa que a la derecha figuran las unidades y en el segundo lugar figuran las "cinquenas".

Exp.: Escriba el número 138.

Suj.: Será 523.

Exp.: No hay cincos.

Suj.: Dividiré por 25, resultará 4 y aún quedarán 38... No, así es imposible. Es necesario tomar $5^3 = 125$; entonces quedarán $13 = 2$... y 3, o sea: 23. $138 = 123$.

Exp.: Compruébelo.

Suj.: El tercer orden son 25... No, esto no está bien, este será el cuarto orden, es decir, 1023, 125 estará en el cuarto lugar.

Exp.: Encuentre el número 43212_5.

Suj.: Utilizaremos la fórmula que sirve para estructurar un número cualquiera... $43212 = 4 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 2$... Ahora sólo hace falta realizar las operaciones (hace el cálculo)... El número será 2932.

Exp.: Escriba el número 49 en el sistema numérico de base dos, es decir con ayuda de los signos 1 y 0.

Suj.: Dividiremos 49 por 2... Resultará 24, con 1 en el residuo... $24 : 2 = 12$ (0); $12 : 2 = 6$ (0); $6 : 2 = 3$ (0); $3 : 2 = 1$ (1)... No, así no resulta, lo haré sin atenerme a sistema alguno... Tomaré enseguida el número más alto que sea potencia de dos y esté contenido en el 49... Será 32 y quedan 17. La siguiente potencia es 16 y queda 1... $49 = 32 + 16 + 1 = 2^5 + 2^4 + 1$; por tanto, será 100000, añadiremos luego el resto... 110001.

Exp.: Halle el número $1\,111\,000_{(2)}$.

Suj.: Aquí tenemos, en total, siete signos; por tanto, la primera unidad será 2^0... Escribiré:

1	1	1	1	0	0	0
64	32	16	8	4	2	1

$= 64 + 32 + 16 + 8 = 120.$

Exp.: Ahora escribiremos los números en el sistema de base trece; para designarlos, utilizaremos los signos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*, *b*, *c*, 0. Escriba el número 532.

Suj.: Aquí, pues, los órdenes serán una potencia de 13 ... 13^0, 13, 169... Luego 169 × 13. Esto ya es un número muy grande, ahora no lo necesitamos. Tomemos 169 × 3 = 507...

532
—
507 — 3
———
25
—
13 — 1
———
12 — c

Será 31c.

Exp.: Encuentre el número 1*ab*(13).

Suj.: ...1*ab*(13)... Ya, comprendido... Procederemos del modo siguiente: 1 es 13^2, *a* = 10 y orden 13; b = 11... 169 + + 130 + 11 = 310.

La anotación del experimento pone de manifiesto que el análisis de la fórmula del número en el sistema decimal permite al examinando utilizar el principio de posición empleado por él al designar el número en el sistema de base cinco.

Examinemos con más detalle el proceso de análisis de la fórmula del número en el sistema decimal. Utilizando el número compuesto de una cantidad igual de unidades de diferentes órdenes, el examinando ve rápidamente las relaciones que constituyen el principio de posición y encuentra la fórmula de cualquier número en el sistema decimal: "Tomo, por ejemplo, el número 333. Es igual a $3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3$... Pero no tenemos más que el 10 (o sea, no tenemos 100, etc. — A. M.); entonces, podemos escribir: $3 \cdot 10^{3-1} + 3 \cdot 10^{2-1} + 3 \cdot 10^{1-1}$. En la fórmula será: $a \cdot 10^{n-1} + b \cdot 10^{n-2} + \ldots + c \cdot 10 + d$".

Vemos que la utilización de un número "concreto" (333) como recurso de análisis permite al examinando distinguir en cualquier número *ab* ... *cd* las relaciones

esenciales que constituyen la regularidad de su estructura. De este modo, el hallazgo de la regularidad a que obedece la estructura del número es el resultado de un proceso de análisis, es un resultado de descomponer el número en elementos y destacar el 10 como elemento de cualquier número. Al proyectar las relaciones vistas en el número 333 sobre un número cualquiera *ab ... cd* en función de lo que se pide en el problema (hallar la fórmula del número), el examinando parece como si hiciera extensivas a cualquier número, como sujetas a ley, las relaciones por él halladas.

Luego recabamos del examinando que analizara la fórmula del número: que delimitara el valor de cada elemento básico de la fórmula respecto a los otros elementos de la misma y, a través de ellos, respecto a la designación de un número concreto.

Al analizar dicha fórmula, el examinando delimita en primer lugar los "exponentes fundamentales" del número: *a*, *b*, *c*, *d*, que son las cifras; *n* que es la cantidad de cifras, y 10. Además, el 10, en su calidad de elemento de la fórmula del número, se pone de relieve con un valor especial, el de una unidad del número que ha de ser utilizada para expresar cada uno de los órdenes del mismo. Correlacionando los distintos órdenes del número con el 10 (como unidad de cálculo en el sistema decimal), el examinando descubre el significado del 10 en la formación de los diferentes órdenes del número, es decir, establece en realidad cierto nexo entre la regularidad descubierta y la designación: "Empecemos por la derecha: *d* significa unidades y, respecto a 10, será 10 elevado a la potencia cero; siguen luego las decenas que, respecto a 10, serán 10 elevado a la primera potencia; después tenemos $100 = 10^2$, etc".

Correlacionando, luego, el exponente de la potencia *n* con el orden del número y luego con el lugar de la cifra en el número, el examinando establece un nexo entre la regularidad y su expresión concreta en el número mediante los caracteres del número sobre el que se estructura la

designación: "El exponente de la potencia —dice el examinando— designa el orden" (del número. — A. M.). Y más adelante, a la pregunta del experimentador: "¿Por qué coloca el número *n* como exponente de la potencia?", el sujeto responde: "...Para determinar el miembro "enésimo" en dependencia de *n*. Bueno... digamos... Para que el miembro de la suma esté determinado *en función de su orden, es decir, del lugar que ocupe en el número*".

Cuando designamos el número, para expresar sus órdenes, no recurrimos directamente al exponente de la potencia, sino al lugar ocupado por la cifra en aquél. De ahí que, para designarlo, sea necesario establecer un nexo entre el orden, el exponente de la potencia y el lugar de la cifra en el número; en general, entre la ley que figura en la base de la fórmula del número y la ley concerniente a la designación de los números concretos. El establecimiento del nexo entre la fórmula del número y la designación de un guarismo, estriba en relacionar la fórmula o la ley que figura en su base con las características del número sobre las que se estructura la designación. Establecida la ley que rige la designación de un número concreto, el examinando puede utilizarla para resolver el problema en nuevas condiciones, es decir, puede designar un número en otro sistema numérico. Ve el problema que se le plantea no como si fuera completamente nuevo, sino como un problema conocido aunque dado en términos algo distintos. Para resolverlo, pues, analiza tan sólo las diferencias que las nuevas condiciones introducen en la ley conocida y delimita el significado del elemento 5 como elemento fundamental, determinante de las diferencias aludidas: "Veamos cuántos cincos contiene... 17:5 = 3 y queda 2. El orden de las *"cinquenas" también* figurará en segundo lugar... Tendremos en este sistema los órdenes 1, 5, 25, etc.... 17 = 32".

En consonancia con la ley anteriormente encontrada acerca de la formación de las unidades de diferente orden en el número, y con sus valores en la designación del

mismo, el examinando encuentra enseguida el contenido de los órdenes en el nuevo sistema de numeración. Esto le permite asimismo hallar enseguida la forma de designación del número 17 en las nuevas condiciones. Delimitado ya el valor del cinco, como base del sistema, en la formación de los órdenes del número, el examinando modifica también la fórmula del número: "Aquí podemos generalizar la fórmula que encontramos para el sistema decimal, pero tenemos que sustituir 10 por 5... En este caso, la fórmula será:

$$d \cdot 5^0 + c \cdot 5^1 + \ldots + b \cdot 5^{n-2} + a \cdot 5^{n-1}".$$

Como han demostrado, pues, los experimentos, el examinando, después de haber encontrado la fórmula de la estructura del guarismo en el sistema decimal de posición, no está aún en condiciones de designar un número en los sistemas de posición no decimales (de base cinco, etc.); para poderlos designar, ha de establecer todavía un eslabón del análisis: delimitar la correlación entre los elementos de la fórmula del número y el procedimiento de designación.

En el curso de nuestros experimentos se planteaba al examinando el siguiente problema: hallar la fórmula general (que incluye las correlaciones sujetas a ley) para expresar cualquier número en el sistema numérico de posición. Los examinandos (familiarizados sólo con la forma de escribir el número en el sistema decimal) llegaron a dicha generalización sólo después de haber analizado las relaciones que figuran en la base de los sistemas numéricos de posición y después de haber inferido (abstraído) dichas relaciones de las condiciones concretas dadas en el experimento (de los sistemas de posición decimal, de base cinco, etc.). El análisis se nos presenta en este caso nítidamente como condición de la generalización; ésta, como resultado del análisis y como condición de la "transferencia" del principio a otras condiciones.

Los experimentos han demostrado que la fórmula general, ya hallada, tampoco asegura siempre la posibilidad de designar números concretos en los correspondientes sistemas de numeración. El examen de las dificultades con que chocan los examinandos pone de manifiesto que exige un análisis no sólo la generalización conducente del hecho de designar los números concretos a la fórmula de su estructura, sino también el proceso inverso indispensable para escribir un determinado número, es decir, el de dar expresión concreta a la fórmula general; en el caso dado, se trata del análisis relativo a las correlaciones entre el orden del número —orden expresado en la fórmula general mediante el exponente de la potencia a que se eleva la base del sistema— y el lugar de la cifra en el guarismo, lugar con que se expresa el orden al escribir el número.

Aplicar la generalización alcanzada (de la fórmula general) prácticamente, al operar, requiere que se le dé una expresión concreta, y ello se expresa en el análisis de las condiciones particulares en que se resuelve el problema, correlacionando con ellas la generalización.

El que sea posible designar números en nuevos sistemas numéricos de posición, así como la posibilidad de efectuar una operación, cualquiera que sea, en las nuevas condiciones, depende de lo que se hayan analizado y generalizado las condiciones que regulan las operaciones aludidas. Cuanto menos profundo sea el análisis y menos amplia sea la generalización, tanto más sujeta y encadenada a las condiciones de partida se encuentra la operación; cuanto más profundo sea el análisis, tanto más amplias serán la generalización y la posibilidad de utilizar en las nuevas condiciones las operaciones por ella reguladas.

N. S. MANSUROV

LA RESOLUCION DE PROBLEMAS Y SU DEPENDENCIA RESPECTO A LA FORMULACION DE LOS ENUNCIADOS Y A LOS ELEMENTOS ILUSTRATIVOS

La presente investigación de la actividad mental tiene por objeto descubrir la dependencia en que se encuentra el curso del pensamiento, al resolver un problema, de la formulación del mismo y de sus elementos ilustrativos.

El método elegido para estudiar la cuestión planteada, ha sido el experimental. Se presentaron problemas matemáticos a alumnos de las últimas clases de dos escuelas medias de Moscú, y a un grupo de personas adultas Los alumnos resolvían los problemas en el círculo matemático de la escuela correspondiente y no sabían cuál era el verdadero fin del experimento. Los problemas se entregaban a los examinandos de diferente manera: en unos casos, se cambiaba la formulación del enunciado; en otros, las figuras; a veces, la resolución de los problemas dados iba precedida de la de otros problemas. Ello se hacía para precisar las condiciones a que obedece el que se elija tal o cual procedimiento al resolver los problemas, y para estudiar el propio decurso de la resolución.

Los examinandos escribían por sí mismos la resolución de los problemas. El material recogido ha hecho posible comparar las particularidades de la resolución en distintas condiciones y, de este modo, poner de manifiesto las regularidades de que depende la elección del procedimiento empleado y, por ende, el decurso del proceso mental. Participaron en los experimentos noventa personas. Se presentaron a resolución 9 problemas del curso escolar de geometría y álgebra.

Los datos experimentales reunidos permiten llegar a la conclusión de que la resolución del problema depende tanto de cómo se presente la figura como de la formulación del enunciado.

La dependencia en que se halla la resolución del problema respecto a la manera en que éste se presenta apareció con singular relieve al efectuar la suma de una serie natural de números. En una variante de este problema, a los examinandos se les daba una serie no muy grande de números (1 + 2 + 3 + 4 + 5). Por regla general, los examinandos efectuaban la suma de los miembros de la serie mediante una suma corriente, pese a que la formulación del enunciado requería de ellos otro procedimiento. En un caso se pedía: "Hállese la suma de los miembros de la *progresión* dada". Pero en otro caso se suprimía la formulación verbal del problema y se sustituía, como suele hacerse en los manuales de matemáticas, por un signo de igualdad y uno de interrogación (1 + 2 + 3 + 4 + 5 = ?).

Figura 1

En la segunda variante del problema, a los examinandos se les presentaba una gran serie de números, por ejemplo, 1 + 2 + 3 + 4 ... + ... 18 + 19 + 20. En la formulación del enunciado se pedía que se calculara la suma de los *números* dados; a pesar de ello, los examinandos resolvían el problema no mediante una suma, sino como una progresión. También se resolvía como progresión de una gran serie de números cuando se suprimía la formulación verbal del problema.

Los datos intuitivos influían asimismo con carácter determinante, en la resolución de algunos problemas geométricos. A los examinandos se les propuso, por ejemplo, hallar la magnitud de las parejas de ángulos opuestos por el vértice sabiendo que una de ellas es dos veces mayor que la otra. Según una variante, se señalaron en la figura dos ángulos; según otra, cuatro (fig. 1). El experimento ha demostrado que la mayor parte de los examinandos resolvieron la primera variante del problema partiendo del concepto de ángulos adyacentes, y la segunda, partiendo del concepto de ángulo de giro completo.

Los datos experimentales han demostrado asimismo que la elección del procedimiento empleado para resolver el problema puede también estar determinada por la formulación, es decir, por los conceptos que contenga el enunciado del problema. Además, para el proceso mental, los diferentes elementos de la formulación tienen un significado distinto. Por una parte, la formulación contiene, como uno de sus elementos, aquel en que se expresa lo que se pide, lo que es necesario hacer (lo que exige el problema): "Hállese la suma...", "Determínense los ángulos...", etc.

Tenemos un convincente ejemplo de la dependencia en que se encuentra el procedimiento de resolución respecto a dicha parte ("imperativa") del enunciado, en la resolución del problema que a continuación se indica. Al examinando se le entregaba una figura (fig. 2) que, objetivamente, admitía más de una interpretación.

El enunciado del problema tenía dos variantes: 1) "Hallad a qué equivale la suma de las superficies del paralelogramo *FBCD* y del cuadrado *AFEC*" y 2) "¿Qué forman conjuntamente las superficies de los triángulos *ABC* y *FED* de la figura, y a qué es igual su suma?". En ambas va-

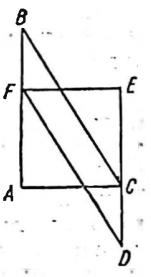

Figura 2

riantes del problema, en calidad de datos numéricos necesarios para el cálculo de las superficies y de su suma, se daba el lado *AB*, igual a *a* y el lado *AC*, igual a *b*.

Con la primera variante del enunciado, todos los examinandos calcularon separadamente la superficie del cuadrado y la del paralelogramo, después de lo cual sumaron los resultados parciales.

Con la segunda variante, casi todos los examinandos que no habían resuelto el problema según la variante primera, prescindieron de las operaciones para el cálculo de la superficie del cuadrado y del paralelogramo; en vez de ello, correlacionaron mentalmente las distintas partes de la figura y enseguida "vieron" que la suma requerida de los triángulos constituye un rectángulo cuya superficie puede también calcularse mentalmente.

Figura 3

De la parte "imperativa" de la formulación, dependía, también, la resolución de otro problema, que se presentaba en dos enunciados sin variar la figura que los ilustraba (fig. 3). Las variantes de los enunciados eran:

Primera variante: "Tenemos tres vectores iguales que inciden en el punto 0 y forman entre sí ángulos de 120 grados. Hallar su resultante". Segunda variante: "En el punto 0 inciden tres vectores iguales. ¿En qué dirección se moverá el punto 0 bajo el efecto de las fuerzas aplicadas, si los vectores forman entre sí ángulos de 120 grados?".

Cuando en el enunciado se preguntaba por la resultante, todos los examinandos solucionaron el problema aplicando para el cálculo la regla del paralelogramo de fuerzas. En cambio, cuando se pedía que se determinara la orientación del movimiento del punto "0", todos los examinandos hallaron objetivamente la misma respuesta sin buscar la resultante, dado que en este caso se "dieron cuenta" de que las fuerzas aplicadas en el punto se aniquilan mutuamente.

Tenemos, pues, que la resolución de los problemas a que acabamos de referirnos era distinta según fuera la parte "imperativa" del enunciado.

Por consiguiente, en ciertos casos, la pregunta contenida en la formulación del problema condiciona el decurso del proceso mental.

Además de la parte en que se pide algo ("imperativa"), el enunciado del problema incluye la parte que contiene los términos conocidos del problema dado. Respecto a los datos perceptibles, dicha parte del enunciado suele ser de tres clases.

En primer lugar, puede ser *neutra*, cuando la formulación del problema no añade nada a lo que proporciona la figura. (Si, verbigracia, la figura representa un triángulo, la definición de la figura dada como triángulo no añade nada a lo dado). Semejante clase de formulación del problema es "neutra" respecto a los datos ilustrativos.

En segundo lugar, el contenido de la formulación verbal puede completar el de la figura. He aquí un caso, a guisa de ejemplo: en la figura se representa un triángulo; en el enunciado éste se define como "isósceles", "equilátero", etc.

En tercer lugar, el enunciado en vez de enriquecer la figura, puede por el contrario empobrecerla. Supongamos que en el dibujo se representa un triángulo cuyo ángulo, en el vértice, es igual a 90° y sus catetos son iguales a a, mientras que en el enunciado se dice: "Tenemos un triángulo isósceles" o bien "Tenemos un triángulo rectángulo". Semejante formulación será más bien "empobrecedora" respecto a la figura dada.

Se manifestó muy claramente la influencia "completiva" de la formulación verbal, cuando se resolvió el problema que a continuación indicamos. En la figura se representaba un triángulo (fig. 4).

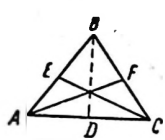

Figura 4

El enunciado del problema decía: "Determínese la base AC del triángulo isósceles ABC siendo sus lados laterales de 5 *cm.* ($AB = BC = 5$ *cm.*) y la altura $BD = 4$ *cm.*, y habiéndose trazado dos bisectrices iguales AF y CE de los ángulos contiguos a la base".

Al resolver el problema, los examinandos se esforzaron ante todo por utilizar la propiedad de las "bisectrices" de que se habla en el enunciado, pese a que ello era totalmente superfluo para la resolución. En este caso, la resolución del problema estaba condicionada por la formulación "enriquecedora", la cual aporta un complemento a la figura innecesario para la resolución.

De qué modo la parte "empobrecedora" de la formulación puede influir en la resolución del problema queda manifiesto con el ejemplo que a continuación aducimos. La figura representa un triángulo con un ángulo de 90° en el vértice y dos lados iguales (fig. 5). La formulación pide: "Hallar la superficie de un triángulo isósceles cuyos lados AB y BC son iguales a α". Resultó que quienes eligieron el procedimiento de resolución guiándose por el enunciado, no "vieron" que el triángulo es, además, rectángulo y, por este motivo, empezaron a trazar la altura, a determinar a qué es igual, etc. El enunciado "empobreció" la figura e hizo que se eligiera una resolución más complicada del problema.

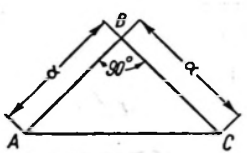

Figura 5

Tenemos, por tanto, que la elección del procedimiento para resolver un problema depende de las diferentes partes de la formulación del enunciado.

¿En qué consiste el "mecanismo" de ese influjo que ejerce la formulación sobre el proceso mental aplicado a resolver el problema? Como hemos indicado ya, la figura (los datos ilustrativos) de un problema posee un conjunto de

propiedades y puede ser definida desde distintos puntos de vista. Si va acompañada de formulación verbal, es percibida unilateralmente, tal como se da a entender en el concepto contenido en el enunciado verbal. Así, por ejemplo, la figura representada en la número 6, siempre era vista como un paralelogramo y no como cierto cuadrilátero si en la formulación se decía: "Tenemos un paralelogramo...". En el problema relativo a la determinación de la suma de las superficies del cuadrado y del paralelogramo (fig. 2), cuando en el enunciado se hablaba de estas dos figuras, la figura era vista precisamente como paralelogramo y cuadrado, pero no como dos triángulos superpuestos, aunque esto era posible, etc.

Figura 6

* * *

Los hechos observados ponen de manifiesto que existen dos tipos de resolución de problemas según cómo se correlacionen sus elementos ilustrativos y su enunciado. Esos tipos son:

1. La resolución "directa", en consonancia con lo que se pide en el enunciado (su parte "imperativa") del problema.

Puede servir como ejemplo de este tipo de resolución la del problema acerca de la serie natural de los números. Si se da al examinando varios números (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6), se le pide que "determine la suma de los números dados" y el examinando saca la cuenta por el procedimiento corriente, tendremos una resolución que se puede denominar "directa". Si pedimos que se halle la superficie de un rectángulo con los lados iguales a a, los examinandos responderán enseguida: "La superficie es igual a a^2".

Uno de los problemas que se presentó a nuestros examinandos fue el de la progresión 1 + 3 + 5 + 7 + 9

+ 11 + 13. El enunciado se daba según dos variantes: "Halle la suma" y "Determinar qué número forman los números dados tomados conjuntamente". Se observó que si la formulación era la primera, los examinandos resolvían la progresión adicionando, partiendo de la idea de que "buscar la suma significa sumar". Presentando la segunda formulación, otro grupo de examinandos formado por seis personas resolvió el problema del modo siguiente: sumando los números, 2 personas; basándose en la suma de los miembros de la progresión, 4 personas. Los examinandos poseían conocimientos iguales sobre las progresiones y la manera de resolverlas. Por consiguiente, su saber no podía constituir una circunstancia capital para que se eligiera uno u otro de los procedimientos de resolución. Resta suponer que, en el primer caso, el nexo asociativo entre lo que se pide: hallar la suma y la operación de sumar ejerció una influencia decisiva en el curso del pensamiento.

Los experimentos han mostrado que las asociaciones con una operación determinada, surgidas cuando el examinando se hace cargo de lo que se pide en el problema, se encuentran estrechamente ligadas a la actitud emocional del sujeto respecto a la operación de referencia. Los examinandos calificaban de "trabajoso", "desagradable" el cálculo de una gran serie de números, así como la determinación de la suma de tres o cuatro números según la fórmula de la suma de los miembros de la progresión. Es esta faceta emocional, relacionada con la operación, lo que se señala en las anotaciones de los propios examinandos como causa de que se elija tal o cual procedimiento para resolver el problema.

Tenemos, pues, que en todos los casos que acabamos de aducir, la selección del procedimiento para resolver el problema, está determinada por lo que se pide. Lo que se pregunta o pide en el problema se encuentra asociado a determinados conocimientos relativos a la ejecución de tales o cuales operaciones. De ahí que cuando los examinandos han de encontrar la suma de los números, efec-

túen la adición, pero cuando se pide que calculen la suma de los miembros de la progresión, reproduzcan la fórmula y operen en consonancia con ella para determinar la suma buscada, etc.

2. La resolución "mediata" (dando otra interpretación a los elementos ilustrativos del problema). Al resolver la mayor parte de los problemas, el proceso mental no es tan simple como el que acabamos de describir. Con mucha frecuencia, el enunciado del problema define de manera unilateral sus elementos ilustrativos, desde un determinado punto de vista subraya propiedades de la figura que no son esenciales para la resolución.

Verbigracia, al presentar la figura 7, decíamos: "Tenemos dos rectas paralelas cortadas por una secante. El ángulo interno formado por la secante y una de las rectas, queda dividido por su bisectriz en dos partes iguales. El segmento de la segunda recta comprendido entre la secante y la bisectriz es igual a a. Es necesario determinar el segmento de la secante entre las dos rectas paralelas". Todo cuanto figura en el enunciado corresponde verdaderamente a la realidad. Sin embargo, semejante definición de la segunda recta no es completa. La segunda recta es, al mismo tiempo, secante y en el presente caso su propiedad como secante tiene más importancia que la propiedad de ser bisectriz.

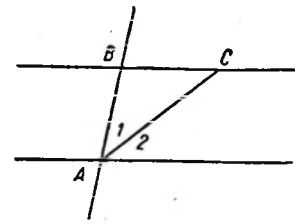

Figura 7

La resolución de este problema puso de manifiesto que casi todos los alumnos conciben primero la línea AC en consonancia con la formulación verbal, dado que ello no está en contradicción con los datos ilustrativos, es decir, la ven como bisectriz. Sin embargo, el problema entendido de semejante manera no puede ser resuelto por falta de

datos; del hecho de que la bisectriz divide el ángulo en dos partes iguales, se deriva la igualdad del ángulo 1 respecto al 2, mas no es posible, así, dar respuesta a la pregunta del problema. Entonces, los alumnos empiezan a buscar datos complementarios, cuya fuente nos la ofrecen en primer lugar los propios términos del problema, susceptibles de una interpretación distinta. Se ha observado que la búsqueda de nuevos datos implica superar ciertas dificultades y —cosa más importante— algunos examinandos la llevan a cabo sin ningún plan determinado, "caóticamente". Por ejemplo, el examinando S., alumno de la 8ª clase, repitió varias veces el enunciado del problema, señalando cada vez los correspondientes elementos de la figura. A la pregunta de "¿Qué estás haciendo?", él respondía: "Faltan datos para la resolución", explicando de este modo el sentido de sus operaciones.

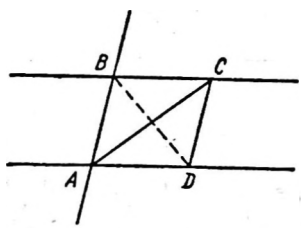

Figura 8

Una de las resoluciones consistió en que los examinandos modificaron la figura que se les había presentado trazando la línea *BD* (fig. 8). A la pregunta de por qué trazaba esa bisectriz, el alumno de la 8ª clase, V., respondió: "Suele haber bisectrices en los triángulos. He decidido construir un triángulo". Para que el triángulo construido contuviera más datos conocidos, el lado *AD* se consideraba igual a *AB* por construcción. En otros casos se trazaba la línea CD paralelamente a *AB* para obtener por construcción un rombo.

Modificada la figura, los alumnos ya no se encuentran con rectas paralelas, una secante y una bisectriz, sino con los triángulos *ABC* y *BCD* o con un rombo y una diagonal. Por tanto, ha cambiado el objeto de su actividad mental. Este nuevo objeto del pensar aún no está definido

conceptualmente. Por esto se analiza y se interpreta la figura resultante, que no está ligada a la anterior formulación verbal, pues ha surgido en el proceso de la resolución. Mientras que al principio los examinandos operaban con una suma de conceptos, bisectriz, secante y rectas paralelas, pasan, ahora, a operar con otra suma de conceptos que se refieren al triángulo y a sus propiedades o a las propiedades del rombo. El nuevo objeto ilustrativo proporciona datos acerca de propiedades que no se daban en los anteriores términos del problema, indispensables para resolverlo con éxito.

A la misma conclusión cabe llegar también como resultado del análisis de otro problema. Su enunciado reza: "Determinar los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que uno de los catetos es igual a la mitad de la hipotenusa". Los datos contenidos en el enunciado no son suficientes para inquirir la respuesta a lo que se pregunta en el problema. Los examinandos se ven obligados a hallar por sí mismos los datos que faltan. Se ha visto que intentan lograrlo mediante construcciones complementarias. "¿Por qué trazas la altura desde el vértice del triángulo?", preguntamos al examinando T., quien "completó" la figura dada trazando la altura y luego la bisectriz. "Quiero encontrar la correlación entre los lados y los ángulos del triángulo rectángulo", respondió. El ulterior análisis puso de manifiesto que el examinando no operaba según un plan determinado.

Semejantes operaciones con los triángulos suelen durar bastante rato. Pero no se ven coronadas por el éxito. El problema parece insoluble. Por este motivo, muchos examinandos se niegan a proseguir la resolución.

Un pequeño grupo de examinandos, al tener que renunciar a las líneas auxiliares que habían trazado en el interior del triángulo, hicieron nuevas tentativas, empezaron a considerar el triángulo dado como la mitad de otro, mayor. El paso a una nueva interpretación de la figura constituye un momento fundamental y decisivo para

la resolución del problema. En el presente artículo no podemos dar una respuesta exhaustiva a la pregunta de cómo se efectúa semejante cambio de interpretación. Las observaciones que hemos recogido sobre la resolución de problemas y los informes dados por los propios examinandos, nos permiten tan sólo indicar que dicho cambio de interpretación con frecuencia se realiza a base de un parecido externo, de asociaciones casuales. Ni uno solo de nuestros examinandos, en el momento de modificar la concepción de la figura, tenía clara conciencia del por qué añadía al triángulo dado otro triángulo igual. No se adivinaba anticipadamente lo que proporcionaría la "repetición" del triángulo. Únicamente cuando se analizaba la figura resultante, se veía que ésta tenía los lados iguales, lo cual permitía establecer la relación buscada entre los lados y los ángulos del triángulo rectángulo.

Vemos, pues, que el proceso de resolución del problema dado estriba en que el propio examinando modifica los datos ilustrativos, contenidos en los términos dados del problema, después de lo cual analiza e interpreta la nueva figura, se establecen en ella correlaciones entre distintos elementos, antes desconocidos. La etapa final en la resolución del problema estriba en la transferencia de las correlaciones establecidas entre los elementos de la nueva figura a los elementos de la primera.

Examinemos otro ejemplo de este tipo de resolución de un problema. Se presenta a los examinandos dos rectas que se cortan formando ángulos opuestos por el vértice (fig. 9). Se ha de demostrar que los ángulos opuestos por el vértice son iguales. La parte determinante del enunciado caracteriza los ángulos como opuestos por el vértice, es decir, no contiene nada nuevo en comparación con la figura. Éste es el motivo de que la principal fuente para obtener los datos indispensables, la hallamos en la

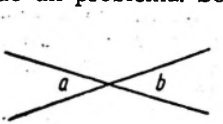

Figura 9

ilustración misma del problema, en la figura. Como quiera que las líneas que se cortan "recuerdan" a los examinandos ciertos elementos de otras figuras geométricas, completan el diseño en base a dicho parecido y luego analizan los elementos del diseño resultante; fundándose en el conocimiento anterior de ángulos adyacentes, establecen una determinada correlación de ángulos, lo cual se expresa en una serie de igualdades anotadas de momento sin una sucesión precisa, caóticamente. Se pasa luego del análisis de la figura al de las igualdades obtenidas (es decir, puede modificarse el objeto del problema), con lo que se obtienen los datos necesarios.

Resulta, por tanto, que cuando la resolución de los problemas es "mediata", los examinandos mismos transforman los datos ilustrativos, el diseño. En consecuencia, cambia el objeto de la actividad mental. El examinando analiza e interpreta la nueva figura con lo que "extrae" de sus elementos propiedades nuevas, antes no observadas, lo cual permite obtener la respuesta necesaria.

El problema se soluciona de manera "mediata" pasando de unos elementos ilustrativos a otros, gracias a lo cual los elementos primeros de la figura son vistos de otro modo, reciben una nueva determinación. El recurrir a nuevos conceptos permite descubrir nuevas facetas, nuevas propiedades de los elementos del primer diseño. Transferencias de este género se llevan a cabo en todos los problemas complejos, que hacen "pensar".

* * *

Los datos experimentales que hemos aducido han puesto de manifiesto que el decurso del proceso del pensar está determinado por los elementos ilustrativos que acompañan al problema y por su enunciación verbal. Para comprobar la veracidad de esta conclusión, llevamos a cabo experimentos especiales con los que nos proponíamos dirigir el curso del pensamiento de nuestros examinandos hacia un procedimiento determinado, previamente estable-

cido, para resolver el problema; nos valíamos de la elección de los correspondientes elementos ilustrativos (de la figura) del problema y también de modificaciones introducidas en el enunciado.

He aquí los resultados de esta serie de experimentos de control.

Al resolverse el problema relativo a la serie natural de los números se vio que los examinandos calculan siempre la suma de varios números unidos por el signo de sumar (por ejemplo "1 + 2 + 3 + 4 + 5 = ?"), mediante la adición aritmética, a pesar de que a veces definían la serie como progresión. Excluyendo la pregunta del problema, presentamos los números de manera un poco distinta, a saber: "1 + 2 + ... + 5 + 6 = ?". Cabía esperar, gracias a semejante cambio de presentación, un cambio en la manera de concebir y resolver el problema. La experiencia ha demostrado que semejante conjetura era acertada. La variante dada del problema no se resuelve, por lo general, como una adición corriente, sino como una progresión. Por tanto, el cambio del aspecto externo del problema hizo que, al hacerse cargo de este último, los examinandos "incluyeran" en la resolución nexos distintos de los que se dieron con la primera variante de la presentación de los elementos, lo cual dio origen a un cambio en la manera de concebir y resolver el problema.

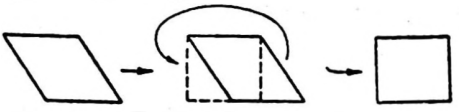

Figura 10

Figura 11

Por lo común, si se presenta a los examinandos una figura de paralelogramo y se les invita a hallar a qué es igual su superficie, la resolución se reduce a transformar el paralelogramo en un rectángulo (fig. 10).

En la serie de experimentos de control, para resolver un problema con el mismo enunciado ("Demostrar a qué es igual la superficie del paralelogramo") presentábamos una figura de otro aspecto (fig. 11).

Cabía esperar que el cambio de presentación externa se reflejara en la manera de concebir el problema y en los procedimientos de resolución. La conjetura también resultó acertada. Sólo un pequeño número de estudiantes resuelve la nueva variante del problema según el procedimiento anterior. En vez de la transformación de la figura, suelen emplearse otros procedimientos de resolución (fig. 12).

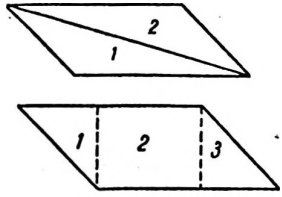

Figura 12

También en el presente caso, pues, la concepción y la resolución del problema dependen de sus elementos ilustrativos (de la figura).

Figura 13

Resolución del problema acerca de los ángulos opuestos por el vértice: "Demostrar que los ángulos opuestos por el vértice son iguales". En la serie de los experimentos de control presentamos este problema según la formulación anterior, pero modificando algo sus elementos ilustrativos: en la nueva figura se habían realzado intencionadamente tres líneas (fig. 13). De este modo esperábamos cambiar la concepción del diseño por parte de los examinandos y, en consecuencia, "imponerles" una solución que, a nuestro modo de ver, había de obtenerse partiendo de las propiedades de los ángulos adyacentes formados por las líneas de trazo grueso.

El experimento ha demostrado que, en efecto, la mayor parte de los examinandos (60 %) resolvió el problema analíticamente, dado en su nueva variante, y sólo un 40 % de los examinandos utilizó otros procedimientos de resolución.

La resolución de este problema es característica en el sentido de que ofrecía la posibilidad de "reforzar" algunos elementos de la figura, de hacerlos más "significativos" para quienes lo resolvían y, con ello, de hacer cambiar intencionadamente la manera de concebir y resolver todo el problema. Aprovechando esta posibilidad, presentamos el problema acerca del cálculo de la superficie del paralelogramo en una variante "destacada" de la figura (fig. 14).

Figura 14

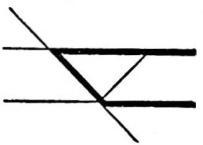

Figura 15

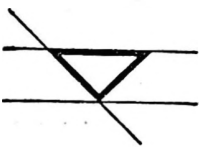

Figura 16

En este diseño se distinguían con singular precisión dos lados que, a nuestro modo de ver, podían ser relacionados sobre todo con los de un triángulo. La solución del problema puso de manifiesto que semejante suposición estaba justificada.

Aparece con singular relieve y significación la dependencia en que se encuentra la manera de concebir el problema de la manera como se "destaca" la figura al resolver el problema al que se refiere la fig. 8. Presentamos dos variantes distintas de la figura correspondiente (figs. 15 y 16), en las cuales se "destacaron" elementos diferentes.

Los resultados obtenidos en la resolución de dicho problema han mostrado que dada la primera variante del diseño (fig. 15) lo más frecuente es que se utilice un procedimiento que consiste en la construcción de un rombo a partir de la propiedad sobre la que se ha fundado la definición del segmento requerido.

Con la segunda variante de la figura (fig. 16), casi todos los examinandos (alumnos de la escuela) resolvieron el problema recurriendo a la propiedad del triángulo isósceles.

Estos hechos han demostrado que el subrayado de elementos de la figura (el "destacarlos") "provoca" la resolución deseada del problema.

Por analogía con el problema de los vectores, en la serie de experimentos de control presentamos un nuevo problema. Los elementos ilustrativos permanecían invariables (fig. 17), pero la formulación se presentaba en dos variantes: "Halle hacia dónde se moverá el punto de incidencia de los vectores dados iguales" y "Halle la resultante de los vectores iguales dados".

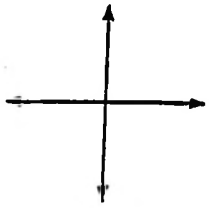

Figura 17

Las resoluciones, más arriba descritas, de un problema análogo permitían esperar que la manera de concebir y resolver el problema sería distinta según fueran las distintas formulaciones verbales del mismo. Y así resultó, en efecto.

En el primer caso, cuando se pedía hallar la resultante, todos los alumnos de la escuela (que se encontraban por primera vez con este problema) lo resolvieron sumando los vectores para hallar la resultante, que resultó igual a cero.

En el segundo caso, cuando lo que se pedía en el enunciado era determinar la dirección del punto de incidencia de los vectores, los examinandos no efectuaron la suma de vectores, sino que se limitaron a correlacionarlos men-

talmente. De este modo enseguida veían que los vectores se neutralizaban recíprocamente, que su resultante es igual a cero y que no se desplazarán hacia ningún lugar.

* * *

De lo expuesto resulta evidente que, en realidad, el decurso de la resolución de un problema (del proceso mental) depende no sólo de la composición lógica del problema, determinante del contenido de la solución, sino, también, del enunciado, y si el problema está acompañado por alguna figura, de la interpretación que se dé al contenido ilustrativo de esta última. Los resultados de nuestros experimentos son una manifestación particular y una confirmación de la unidad existente entre pensamiento y lenguaje, de la interconexión que se da entre lo sensorial y lo lógico en el proceso del pensar.

INDICE

Nota preliminar 7

EL PROCESO DEL PENSAR Y LA UTILIZACION DE LOS CONOCIMIENTOS 9

I. La transferencia de la resolución y su dependencia respecto al análisis, a la síntesis y a la generalización 9

II. Dependencia en que se encuentra la actualización de principios generales respecto al análisis, a la síntesis y a la generalización 38

Actualización en las etapas finales del análisis del problema 50

Actualización en las etapas primeras del análisis del problema 57

EL PAPEL DEL ANALISIS Y LA GENERALIZACION EN LA ACTIVIDAD COGNOSCITIVA 67

EL PAPEL DEL ANALISIS Y LA ABSTRACCION EN EL CONOCIMIENTO DE LAS RELACIONES CUANTITATIVAS 99

EL PAPEL DEL ANALISIS EN EL CONOCIMIENTO DE LAS RELACIONES DE CAUSA Y EFECTO 135

ANALISIS Y GENERALIZACION DE RELACIONES 161

Generalización de relaciones partiendo de la obtención previa de la fórmula del número en el sistema decimal 165

Generalización de relaciones partiendo de la designación previa de los números en el sistema de base cinco 183

Generalización de relaciones partiendo del análisis previo de la fórmula del número en el sistema decimal 193

LA RESOLUCION DE PROBLEMAS Y SU DEPENDENCIA RESPECTO A LA FORMULACION DE LOS ENUNCIADOS Y A LOS ELEMENTOS ILUSTRATIVOS 201

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR
EN EL MES DE OCTUBRE
DE 1963 EN LOS TALLERES
DE IMPRENTA LETRAS S. A.
LA PAZ 1829, MONTEVIDEO

Universidad de Oviedo
Seminario de Filosofía